**Uniwersytet Warszawski**
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

**Przemysław Ohrysko**
Nr albumu: 262695

# Wokół fenomenu Wienera-Pitta

**Praca magisterska**
**na kierunku MATEMATYKA**

Praca wykonana pod kierunkiem
**dra Michała Wojciechowskiego**

## Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data                                                    Podpis kierującego pracą

## Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data                                                    Podpis autora (autorów) pracy

### Streszczenie

Praca jest podzielona na trzy rozdziały. Pierwszy jest przypomnieniem i zebraniem podstawowej wiedzy, która jest używana w następnych częściach tekstu. Drugi rozdział zawiera informacje o podstawowych własnościach algebry $M(\mathbb{T})$. W trzecim rozdziale, stanowiącym główną część pracy, występują rezultaty całkowicie nowe oraz klasyczne, choć często już zapomniane, wyniki.

### Słowa kluczowe

fenomen Wienera-Pitta, miary o naturalnym spektrum, algebra miar

### Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1. Matematyka

### Klasyfikacja tematyczna

43A10 (AMS 2010 Classification)

### Tytuł pracy w języku angielskim

Around Wiener-Pitt's phenomenas

# Spis treści

# Wprowadzenie

W 1938 N. Wiener i H. R. Pitt podali przykład miary na prostej, której współczynniki Fouriera-Stieltjesa są oddzielone od zera, a jednocześnie nie będącej elementem odwracalnym w algebrze miar. Jest to słynny problem odwrotności, którego negatywne rozwiązanie jest współcześnie znane w algebrze $M(G)$ dla dowolnej lokalnie zwartej grupy abelowej (niedyskretnej). Tego typu zagadnienia są ściśle związane z teorią Gelfanda i większość wyników tej teorii wykorzystuje bardzo silnie jej aparat. Warto zadać sobie pytanie, jak daleko to zjawisko (fenomen Wienera-Pitta) sięga. Okazuje się, że ma ono swoje źródło w innym bardzo starym problemie - zagadnieniu charakteryzacji przestrzeni ideałów maksymalnych algebry miar. Burzliwy rozwój analizy harmonicznej doprowadził do udowodnienia przez Henry Helsona (w latach pięćdziesiątych) charakteryzacji idempotentów w $M(\mathbb{T})$, którą można zastosować do uzasadnienia, iż jeśli miara na okręgu ma skończenie wiele różnych współczynników Fouriera-Stieltjesa, to fenomen Wienera-Pitta nie zachodzi. Rozważany problem jest równoważny pytaniu o naturalność spektrum miary, to znaczy, czy spektrum miary jest równe domknięciu jej współczynników Fouriera-Stieltjesa. Fundamentalna dla naszych badań jest praca Mischy Zafrana, w której zostało wykazane, że zbiór miar o naturalnym spektrum jest domkniętym ideałem w algebrze $M_0(\mathbb{T})$. Wokół problemów tego typu powstała moja praca. Najciekawszym wynikiem w niej zawartym jest konstrukcja nieskończonego ciągu o tej własności, że jeśli miara z $M_0(\mathbb{T})$ ma współczynniki Fouriera-Stieltjesa należące do tego ciągu, to ma ona naturalne spektrum. Jest to zupełnie nowe twierdzenie wykorzystujące w istotny sposób tak mocne rezultaty jak rozwiązanie hipotezy Littlewooda oraz twierdzenie Bożejki-Pełczyńskiego-Bourgaina. Aby tego dokonać przeprowadzam najpierw w swojej pracy systematyczny wykład teorii własności spektralnych algebry $M(\mathbb{T})$ oraz przegląd wielu ciekawych, lecz mało popularnych zagadnień z pogranicza analizy harmonicznej i teorii algebr Banacha.

# Rozdział 1

# Wiadomości wstępne

## 1.1. Funkcje na okręgu i funkcje holomorficzne

W tym podrozdziale przypomnimy podstawowe wiadomości o funkcjach analitycznych oraz wprowadzimy pewne konwencje niezbędne przy pracy z funkcjami określonymi na okręgu.

**Definicja 1.1.1.** *Okręgiem będziemy nazywać grupę ilorazową* $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Przyjmując naturalną identyfikację okręgu z odcinkiem $[0, 2\pi]$ z utożsamionymi końcami możemy zamiast funkcje określone na $\mathbb{T}$, rozważać funkcje określone na odcinku $[0, 2\pi]$ (o równych wartościach w krańcach przedziału), bądź funkcje okresowe na $\mathbb{R}$ (o okresie $2\pi$). Sformułujmy ważną uwagę.

**Uwaga 1.1.2.** *Na okręgu będziemy używać unormowanej miary Lebesgue'a, którą będziemy oznaczać* $|E|$ *dla* $E \subset \mathbb{T}$*-borelowskich. W szczególności* $|\mathbb{T}| = 1$.

Przechodzimy teraz do omówienia podstawowych własności funkcji holomorficznych. Zaczynamy od definicji.

**Definicja 1.1.3.** *Funkcję określoną na pewnym obszarze* $A$ *zawartym w płaszczyźnie zespolonej nazywamy holomorficzną (analityczną), jeśli w otoczeniu każdego punktu jest ona równa swojemu rozwinięciu w szereg potęgowy*

Zachodzi ważne twierdzenie.

**Twierdzenie 1.1.4.** *Funkcja* $f$ *jest analityczna w obszarze* $A$ *wtedy i tylko wtedy, gdy ma ona pochodną zespoloną w każdym punkcie obszaru* $A$.

W kilku miejscach zastosujemy wzór całkowy Cauchy'ego.

**Twierdzenie 1.1.5.** *Jeśli* $f$ *jest holomorficzna w obszarze* $A$*, to dla każdego* $z \in A$ *zachodzi wzór całkowy Cauchy'ego*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(u)}{z-u} du,$$

*gdzie* $C$ *jest zamkniętą krzywą regularną zawartą w obszarze* $A$ *oraz otaczającą punkt* $z$.

Za pomocą twierdzenia całkowego Cauchy'ego możemy podać wzory na współczynniki rozwinięcia w szereg potęgowy.

**Fakt 1.1.6.** *Jeśli $f$ jest funkcją holomorficzną w obszarze $A$ oraz*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ dla pewnego } z \in A,$$

*to współczynniki $a_n$ wyrażają się wzorami*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}} \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Będziemy także używać rozwinięcia w szereg Laurenta.

**Twierdzenie 1.1.7.** *Jeśli $f$ jest funkcją analityczną w pierścieniu $r < |z-z_0| < R$ ($R > r > 0$, $z_0$ jest ustalonym punktem płaszczyzny zespolonej), to jest ona równa swojemu rozwinięciu w szereg Laurenta, czyli*

$$f(z) = \sum_{n-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ dla } r < |z-z_0| < R,$$

*gdzie współczynniki $a_n$ wyrażają się wzorami*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(u)}{(z-u)^{n+1}} \text{ dla } n \in \mathbb{Z}.$$

*Krzywa $C$ spełnia takie założenia jak we wzorze całkowym Cauchy'ego.*

Przypomnijmy jeszcze definicję bieguna funkcji analitycznej określonej na pierścieniu.

**Definicja 1.1.8.** *Jeśli $f$ jest funkcją analityczną w pierścieniu $r < |z-z_0| < R$, o tej własności, że liczba niezerowych współczynników przy ujemnych potęgach wyrażenia $(z-z_0)$ jej rozwinięcia w szereg Laurenta jest skończona, to punkt $z_0$ nazywamy biegunem funkcji $f$. Rząd bieguna określamy jako największą liczbę $|n|$ taką, że $a_{-n} \neq 0$. W szczególności, biegun rzędu jeden nazywamy biegunem prostym.*

W niektórych przypadkach funkcje będą miały wartości w przestrzeniach Banacha. Wszystkie definicje i twierdzenia pozostają prawdziwe (należy uwzględnić oczywiste różnice). Jako definicję całki przyjmujemy proste przeformułowanie całki Riemanna na przypadek funkcji o wartościach w przestrzeniach Banacha.

**Komentarze i odniesienia do literatury.** Dowody wszystkich faktów opisanych w tym podrozdziale można z łatwością znaleźć w dowolnym podręczniku traktującym o funkcjach analitycznych (na przykład: [Leja]). Krótkie wprowadzenie do całkowania funkcji o wartościach w przestrzeniach Banacha znajduje się na przykład w pozycji [Żelazko].

## 1.2. Przestrzenie Banacha i Operatory

Elementarne fakty dotyczące przestrzeni Banacha i operatorów liniowych będą często używane w dalszej części pracy. Ten podrozdział służy głównie ich zebraniu oraz ustaleniu notacji.

**Definicja 1.2.1.** *Niech $X$ będzie przestrzenią liniową (nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$). Przestrzenią Banacha nazywamy parę $(X, ||\cdot||)$, gdzie funkcja $||\cdot|| : X \mapsto \mathbb{R}_+$ zwana normą spełnia warunki:*

- $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- $\forall_{x \in X} \forall_{t \in K}\ ||tx|| = |t|||x||$, *gdzie* $K$ *jest ciałem, nad którym określona jest* $X$,
- $\forall_{x,y \in X}\ ||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$,

*taką, że przestrzeń* $X$ *jest zupełna w metryce* $d(x, y) = ||x - y||$.

**Definicja 1.2.2.** *Niech* $X$ *będzie przestrzenią Banacha. Przez* $X^*$ *będziemy oznaczać przestrzeń sprzężoną (dualną) do przestrzeni* $X$ *składającą się ze wszystkich ciągłych funkcjonałów liniowych określonych na* $X$. *W takiej sytuacji będziemy też mówić, że przestrzeń* $X$ *jest przestrzenią predualną dla* $X^*$.

Bez trudu dowodzi się poniższy fakt.

**Fakt 1.2.3.** *Określona powyżej przestrzeń sprzężona* $X^*$ *jest przestrzenią Banacha z naturalnymi działami oraz normą zdefiniowaną jako*

$$||x^*||_{X^*} = \sup\{|x^*(x)| : ||x|| \leqslant 1, x \in X\} \ \textit{dla}\ x^* \in X^*.$$

Przechodzimy teraz do omawiania słabych i słabych* topologii.

**Definicja 1.2.4.** *Dla przestrzeni Banacha* $X$ *określamy słabą topologię jako najsłabszą topologię, w której funkcjonały ciągłe w normie pozostają ciągłe (oznaczenie:* $\sigma(X, X^*)$*).*

**Fakt 1.2.5.** *Bazę otoczeń zera przestrzeni topologicznej* $(X, \sigma(X, X^*))$ *stanowią zbiory postaci:*

$$U(\varepsilon, x_1^*, \ldots, x_n^*) = \{x \in X : |x_i^*(x)| < \varepsilon,\ \textit{dla}\ i = 1, \ldots, n\},$$
$$\textit{gdzie}\ \varepsilon > 0\ \textit{oraz}\ n \in \mathbb{N},\ x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*.$$

**Fakt 1.2.6.** *Jeśli* $X^*$ *jest przestrzenią ośrodkową, to słaba topologia obcięta do kuli jest metryzowalna (to znaczy metryzowalna jest topologia przestrzeni* $(B_X, \sigma(X, X^*)|_{B_X})$*).*

**Definicja 1.2.7.** *Powiemy, że ciąg* $x_n \in X$ *zbiega słabo do* $x$, *jeśli jest to ciąg zbieżny do* $x$ *w topologii* $\sigma(X, X^*)$ *(oznaczenie:* $x_n \rightharpoonup x$*). Równoważnie,* $x_n$ *zbiega słabo do* $x$, *gdy zachodzi:*

$$\forall_{x^* \in X^*} \lim_{n \to \infty} x^*(x_n) = x^*(x)$$

Następne fakty są typowymi zastosowaniami twierdzenia Banacha-Steinhausa.

**Fakt 1.2.8.** *Ciąg słabo zbieżny jest ograniczony w normie.*

**Fakt 1.2.9.** *Niech* $A^*$ *będzie zbiorem liniowo gęstym w normowej topologii* $X^*$ *i niech* $x_n \in X$, $x_0 \in X$. *Ciąg* $x_n$ *jest zbieżny słabo do* $x_0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $x^*(x_n) \to x^*(x_0)$ *dla każdego* $x^* \in A^*$ *oraz ciąg* $x_n$ *jest ograniczony w normie.*

**Definicja 1.2.10.** *Na przestrzeni dualnej* $X^*$ *możemy określić słabą* topologię jako najsłabszą topologię na* $X^*$ *taką, że funkcjonały na* $X^*$ *ciągłe w normie pozostają ciągłe (oznaczenie:* $\sigma(X^*, X)$*).*

**Fakt 1.2.11.** *Bazę otoczeń zera przestrzeni topologicznej* $(X^*, \sigma(X^*, X))$ *stanowią zbiory postaci:*

$$U(\varepsilon, x_1, \ldots, x_n) = \{x^* \in X^* : |x^*(x_i)| < \varepsilon,\ \textit{dla}\ i = 1, \ldots, n\},$$
$$\textit{gdzie}\ \varepsilon > 0\ \textit{oraz}\ n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in X.$$

**Fakt 1.2.12.** *Jeśli $X$ jest przestrzenią ośrodkową, to słaba* $^*$ *topologia obcięta do kuli jest metryzowalna (to znaczy metryzowalna jest topologia przestrzeni $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X)|_{B_{X^*}})$).*

**Definicja 1.2.13.** *Powiemy, że ciąg $x_n^* \in X^*$ zbiega słabo$^*$ do $x^*$, jeśli jest to ciąg zbieżny do $x^*$ w topologii $\sigma(X^*, X)$ (oznaczenie: $x_n^* \rightharpoonup x^*$). Równoważnie, $x_n^*$ zbiega słabo$^*$ do $x^*$, gdy zachodzi:*

$$\forall_{x \in X} \lim_{n \to \infty} x_n^*(x) = x^*(x)$$

**Fakt 1.2.14.** *Ciąg słabo$^*$ zbieżny jest ograniczony w normie.*

**Fakt 1.2.15.** *Niech $A$ będzie zbiorem liniowo gęstym w normowej topologii $X$ i niech $x_n^* \in X^*$, $x_0^* \in X^*$. Ciąg $x_n^*$ jest zbieżny słabo$^*$ do $x_0^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_n^*(x) \to x_0^*(x)$ dla każdego $x \in A$ oraz ciąg $x_n^*$ jest ograniczony w normie.*

Zachodzi podstawowe twierdzenie (sprowadzające się do twierdzenia Tichonowa).

**Twierdzenie 1.2.16** (Banacha-Alaoglu)**.** *Niech $X$ będzie przestrzenią Banacha, wtedy kula $B_{X^*}$ jest słabo$^*$ zwarta (to znaczy zwarta jest przestrzeń topologiczna $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$).*

**Wniosek 1.2.17.** *Jeśli $X$ jest przestrzenią ośrodkową, to kula $B_{X^*}$ jest ciągowo słabo$^*$ zwarta, czyli z każdego ograniczonego w normie ciągu elementów z $X^*$ można wybrać podciąg słabo$^*$ zbieżny.*

Omówimy teraz podstawowe własności operatorów ograniczonych na przestrzeniach Banacha.

**Definicja 1.2.18.** *Niech $X, Y$ będą przestrzeniami unormowanymi. Odwzorowanie liniowe $T : X \mapsto Y$ nazywamy operatorem liniowym, gdy jest ciągłe, to znaczy zachodzi jeden z równoważnych warunków (trzeci z nich czytamy jako $T$ jest operatorem ograniczonym).*

- *$T$ jest ciągłe.*
- *$T$ jest ciągłe w zerze.*
- *$||Tx||_Y \leqslant C||x||_X$ dla pewnej stałej $C > 0$ oraz wszystkich $x \in X$.*

**Stwierdzenie 1.2.19.** *Jeśli $X$ jest przestrzenią unormowaną, a $Y$ jest przestrzenią Banacha, to zbiór $B(X, Y)$ ograniczonych operatorów liniowych jest przestrzenią Banacha z działaniami punktowymi i normą*

$$||T||_{B(X,Y)} = \sup_{||x|| \leqslant 1} ||Tx||_Y.$$

*W przypadku, gdy $X = Y$ będziemy pisać $B(X) := B(X, X)$.*

**Definicja 1.2.20.** *Niech $X$ będzie przestrzenią Banacha oraz $T \in B(X)$. Określamy spektrum operatora $T$ jako zbiór*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \textit{ nie jest odwracalny}\}.$$

*Dla $\lambda \notin \sigma(T)$ określamy rezolwentę operatora wzorem*

$$R(\lambda, T) = (T - \lambda I)^{-1}.$$

*Spektrum operatora możemy podzielić na trzy rozłączne podzbiory - spektrum punktowe ($\sigma_p(T)$), spektrum ciągłe $\sigma_c(T)$ oraz spektrum rezidualne $\sigma_r(T)$.*

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \textit{ nie jest różnowartościowy}\}$$
$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I)(X) \neq X, \textit{ ale } \overline{(T - \lambda I)(X)} = X\}$$
$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{(T - \lambda I)(X)} \neq X\}$$

Przykłady

- Przestrzeń $l^p(\mathbb{Z})$ $(1 \leqslant p < \infty)$ to zbiór ciągów zespolonych, sumowalnych z modułem, z działaniami określonymi po współrzędnych oraz normą $||x||_{l^p(\mathbb{Z})} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Analogicznie możemy określić przestrzeń $l^p(\mathbb{N})$.
- Przestrzeń $l^\infty(\mathbb{Z})$ to zbiór ograniczonych ciągów dwustronnych o wyrazach zespolonych z działami po współrzędnych i normą $||x||_{l^\infty} = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{Z}\}$ (można także oczywiście rozpatrywać przestrzeń $l^\infty(\mathbb{N})$ ciągów jednostronnych przy uwzględnieniu stosownych różnic).
- Przestrzeń $L^p(\mathbb{T})$ $(1 \leqslant p < \infty)$ to przestrzeń funkcji (klas równoważności) mierzalnych, całkowalnych z $p$-tą potęgą z oczywistymi działaniami oraz normą $||f||_{L^p(\mathbb{T})} = \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$.

**Komentarze i odniesienia do literatury.** Podane w tym podrozdziale fakty i twierdzenia można znaleźć w pozycjach [Musielak] i [Rudin2].

## 1.3. Teoria miary

Obecny podrozdział jest jednym z najdłuższych w części wprowadzającej. Jednak zdefiniowane tutaj pojęcia oraz sformułowane twierdzenia będą przewijać się przez całą pracę, dlatego takie szczegółowe omówienie wydaje się konieczne.
Zaczynamy od podstawowych definicji.

**Definicja 1.3.1.** *Niech $X$ będzie zbiorem $\sigma-$ciałem $\mathcal{F}$ podzbiorów $X$ nazywamy rodzinę zbiorów spełniającą warunki:*

- $X \in \mathcal{F}$.
- *Jeśli $A \in \mathcal{F}$, to $X \setminus A \in \mathcal{F}$.*
- *Jeżeli $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}$ oraz $A_n \in \mathcal{F}$ dla $n = 1, 2, \ldots,$ to $A \in \mathcal{F}$*

**Definicja 1.3.2.** *Niech $X$ będzie przestrzenią topologiczną. $\sigma-$ciałem zbiorów borelowskich nazywamy najmniejsze $\sigma-$ciało zawierające zbiory otwarte.*

**Definicja 1.3.3.** *Niech $\mathcal{F}$ będzie $\sigma-$ciałem w zbiorze $X$. Przeliczalną rodzinę $\{E_i\}$ elementów rodziny $X$ nazywamy podziałem zbioru $E$, jeśli $E = \bigcup E_i$ oraz $E_i \cap E_j = \emptyset$, gdy $i \neq j$.*

**Definicja 1.3.4.** *Miarą zespoloną $\mu$ na $\mathcal{F}$ nazywamy funkcję zespoloną określoną na $\mathcal{F}$ taką, że*

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \ (E \in \mathcal{F})$$

*dla dowolnego podziału $\{E_i\}$ zbioru $E$.*

**Uwaga 1.3.5.** *Od tej chwili będziemy używać określenia "miara" w odniesieniu do miar zespolonych, chcąc podkreślić pewne szczególne własności miary będziemy pisać na przykład "miara rzeczywista" lub "miara dodatnia" (to ostatnie określenie oznacza miarę przyjmującą tylko wartości nieujemne).*

**Definicja 1.3.6.** *Niech $\mu$ będzie miarą. Funkcję $|\mu|$ określoną na $\mathcal{F}$ wzorem*

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|, \text{ gdzie kres górny wzięto po wszystkich podziałach } \{E_i\} \text{ zbioru } E.$$

*nazywamy miarą wahania miary $\mu$.*

**Twierdzenie 1.3.7.** *Wahanie $|\mu|$ miary $\mu$ określonej na $\mathcal{F}$ jest miarą dodatnią na $\mathcal{F}$.*

**Definicja 1.3.8.** *Wahaniem miary $\mu$ na $X$ nazywamy liczbę $|\mu|(X)$.*

**Twierdzenie 1.3.9.** *Jeżeli $\mu$ jest miarą zespoloną na $X$, to $|\mu|(X) < \infty$.*

**Definicja 1.3.10.** *Miarę $\mu$ na przestrzeni topologicznej $X$ nazywamy borelowską, jeśli jest ona określona na $\sigma-$ciele zbiorów borelowskich przestrzeni $X$.*

**Definicja 1.3.11.** *Dodatnią miarę borelowską określoną na pewnej przestrzeni topologicznej $X$ nazywamy regularną, jeśli dla każdego zbioru borelowskiego $E \subset X$ zachodzą warunki*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V \text{ i } V \text{ jest otwarty}\}$$
$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E \text{ i } K \text{ jest zwarty}\}$$

**Definicja 1.3.12.** *Zespoloną miarę borelowską określoną na przestrzeni topologicznej $X$ nazywamy regularną, jeśli miara dodatnia $|\mu|$ jest miarą regularną.*

Możemy teraz w zbiorze miar wprowadzić strukturę przestrzeni unormowanej.

**Definicja 1.3.13.** *Niech $\mu$, $\nu$ będą regularnymi miarami borelowskimi na przestrzeni topologicznej $X$ oraz $c \in \mathbb{C}$. Określamy działania przestrzeni liniowej wzorami*

- $(\mu + \nu)(E) = \mu(E) + \nu(E)$ *dla $E$-borelowskich*
- $(c\mu)(E) = c\mu(E)$ *$E$-borelowski.*

*Wprowadzamy także normę $||\mu|| = |\mu|(X)$, czyniąc z przestrzeni zespolonych miar borelowskich na przestrzeni topologicznej $X$ przestrzeń unormowaną $M(X)$.*

**Fakt 1.3.14.** *Każdą miarę $\mu \in M(X)$ możemy rozłożyć na sumę miary rzeczywistej i miary przyjmującej wartości czysto urojone (z dodanym 0), czyli istnieją miary rzeczywiste $\mu_1, \mu_2 \in M(X)$ takie, że $\mu = \mu_1 + i\mu_2$.*

Niejednokrotnie w dowodach będziemy używać rozkładu miary na część dodatnią i ujemną.

**Twierdzenie 1.3.15** (Rozkład Jordana)**.** *Niech $\mu \in M(X)$ będzie miarą rzeczywistą. Określamy miary dodatnie $\mu^+, \mu^- \in M(X)$ wzorami $\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu)$, $\mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$. Wtedy zachodzą wzory*

$$\mu = \mu^+ - \mu^-, \ |\mu| = \mu^+ + \mu^-$$

*oraz powyższy rozkład miary $\mu$ na różnicę miar dodatnich jest minimalny, to znaczy, jeśli $\mu = \lambda_1 - \lambda_2$, gdzie $\lambda_1, \lambda_2$ są miarami dodatnimi, to $\lambda_1 \geqslant \mu^+$ oraz $\lambda_2 \leqslant \mu^-$.*

**Wniosek 1.3.16.** *Każdą miarę zespoloną $\mu \in M(X)$ można rozłożyć na sumę czterech miar*

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4, \text{ gdzie } \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \text{ są miarami dodatnimi.}$$

*Powyższy rozkład można dobrać tak, aby spełniał warunek minimalności analogiczny do opisanego w twierdzeniu poprzednim.*

Kolejne definicje zawierają istotne informacje dotyczące terminologii występującej w dalszej części pracy.

**Definicja 1.3.17.** *Wprowadzimy kilka kluczowych pojęć i oznaczeń.*

- *Mówimy, że miara $\lambda$ jest absolutnie ciągła względem miary $\mu$ i piszemy $\lambda \ll \mu$, jeżeli dla każdego zbioru borelowskiego $E$ takiego, że $\mu(E) = 0$ zachodzi równość $\lambda(E) = 0$.*
- *Jeżeli istnieje zbiór borelowski $A$ taki, że $\lambda(E) = \lambda(A \cap E)$ dla każdego $E$ to mówimy, że miara jest skupiona na zbiorze $A$.*
- *Jeżeli $\lambda_1$ i $\lambda_2$ są miarami oraz istnieje para zbiorów rozłącznych $A, B$ takich, że $\lambda_1$ jest skupiona na $A$ oraz $\lambda_2$ jest skupiona na $B$ to mówimy, że miary $\lambda_1$ i $\lambda_2$ są wzajemnie osobliwe i piszemy $\lambda_1 \perp \lambda_2$.*

**Definicja 1.3.18.** *Nie wszystkie definicje w tej części są standardowe.*

- *Miarę $\mu \in M(X)$ nazywamy dyskretną, jeśli jest skupiona na zbiorze przeliczalnym.*
- *Miarę $\mu \in M(X)$ nazywamy ciągłą (bezatomową), jeśli dla każdego $x \in X$ zachodzi $\mu(\{x\}) = 0$.*
- *Miarę $\mu \in M(\mathbb{T})$ nazywamy singularną, gdy jest miarą ciągłą osobliwą względem miary Lebesgue'a na $\mathbb{T}$.*

**Fakt 1.3.19.** *Każdą miarę $\mu \in M(X)$ możemy jednoznacznie przedstawić w postaci sumy $\mu = \mu_d + \mu_c$, gdzie $\mu_d$ jest miarą dyskretną, a $\mu_c$ jest miarą ciągłą.*

Oczywiście każda miara zadana przez całkę z funkcji $h \in L^1(\mu)$ jest absolutnie ciągła względem miary $\mu$. Zachodzi również niezwykle ważne twierdzenie odwrotne.

**Twierdzenie 1.3.20** (Lebesgue'a-Radona-Nikodyma)**.** *Załóżmy, że $\mu, \lambda \in M(X)$ są miarami dodatnimi.*

1. *Istnieje dokładnie jedna para miar $\lambda_{ac}$ i $\lambda_s$ spełniająca*
$$\lambda = \lambda_{ac} + \lambda_s, \ \ \lambda_a \ll \mu, \ \ \lambda_s \perp \mu.$$
2. *Istnieje dokładnie jedna funkcja $f \in L^1(\mu)$ taka, że dla każdego zbioru borelowskiego $E$ zachodzi*
$$\lambda_a(E) = \int_E h d\mu.$$

**Uwaga 1.3.21.** *Twierdzenie Lebesgue'a-Radona-Nikodyma pozostaje prawdziwe, jeśli $\mu \in M(X)$ jest miarą dodatnią, a $\lambda \in M(X)$ dowolną miarą (zespoloną).*

Pierwszorzędną rolę odgrywa traktowanie miar jako funkcjonałów na przestrzeni funkcji ciągłych.

**Twierdzenie 1.3.22** (Riesza o reprezentacji)**.** *Jeżeli $X$ jest przestrzenią zwartą, to dla każdego $\varphi \in C^*(X)$ istnieje dokładnie jedna zespolona miara borelowska $\mu \in M(X)$ taka, że*
$$\varphi(f) = \int_X f d\mu. \text{ dla każdego } f \in C(X)$$
*Co więcej, zachodzi równość $||\varphi||_{C^*(X)} = ||\mu||_{M(X)}$.*

**Wniosek 1.3.23.** *$M(X)$ jest przestrzenią Banacha.*

**Wniosek 1.3.24.** *Niech $X$ będzie przestrzenią zwartą. Przestrzeń $(C(X))^*$ jest izometrycznie izomorficzna z przestrzenią $M(X)$. W ten sposób każdą miarę $\mu \in M(X)$ możemy traktować jako funkcjonał na przestrzeni $C(X)$, którego wartość na funkcji $f$ opisaną w twierdzeniu Riesza będziemy oznaczać $< \mu, f >$.*

Omówimy teraz miary produktowe.
Jeśli dane są dwie miary borelowskie $\mu \in M(X)$ oraz $\lambda \in M(Y)$ określone na lokalnie zwartych przestrzeniach $X, Y$, to dla dowolnych zbiorów borelowskich $A \subset X$, $B \subset Y$ określamy wartość miary produktowej na iloczynie kartezjańskich tych zbiorów wzorem

$$(\mu \times \lambda)(A \times B) = \mu(A)\lambda(B). \tag{1.1}$$

W ten sposób zdefiniowaliśmy miarę produktową na "prostokątach", zachodzi jednak następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 1.3.25.** *Funkcja określona wzorem 1.1 ma jednoznaczne rozszerzenie na $\sigma$-ciało borelowskich podzbiorów $X \times Y$ będące miarą regularną.*

Prowadzi to do następującej definicji.

**Definicja 1.3.26.** *Miarę, której istnienie jest postulowane w twierdzeniu 1.3.25 nazywamy produktem miar $\mu$ i $\lambda$.*

Podstawowym narzędziem przy posługiwaniu się miarami produktowymi jest twierdzenie Fubiniego.

**Twierdzenie 1.3.27** (Fubiniego). *Jeśli $\mu \in M(X), \lambda \in M(Y)$ są miarami nieujemnymi oraz $f$ jest nieujemną funkcją borelowską na $X \times Y$, to zachodzi wzór*

$$\int_{X\times Y} f d(\mu \times \lambda) = \int_X \int_Y f(x,y) d\lambda(y) d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y) d\mu(x) d\lambda(y). \tag{1.2}$$

*Jeśli $\mu \in M(X), \lambda \in M(Y)$ oraz $f$ jest funkcją borelowską na $X \times Y$ oraz jeśli zachodzi warunek*

$$\int_X \int_Y |f(x,y)| d|\lambda|(y) d|\mu|(x) < \infty,$$

*to równość 1.2 również zachodzi.*

**Komentarze i odniesienia do literatury.** W tym przeglądzie teorii miary wzorowałem się na książce [Rudin2]. Niektóre, mniej standardowe definicje są zgodne z tymi używanymi w [Rudin3].

## 1.4. Ultrafiltry i rozszerzenie Cecha-Stone'a

W tym podrozdziale omówimy krótko pojęcie ultrafiltru oraz rozszerzenia Cecha-Stone'a (tylko w odniesieniu do przestrzeni dyskretnej $\mathbb{Z}$). Ta wiedza będzie dla nas użyteczna przy badaniu przestrzeni ideałów maksymalnych algebry $l^\infty(\mathbb{Z})$ i później w sytuacji algebry $M(\mathbb{T})$. Zacznijmy od definicji.

**Definicja 1.4.1.** *Rozszerzeniem zwartym (uzwarceniem) przestrzeni $\mathbb{Z}$ będziemy nazywali parę $(Y, r)$, gdzie $Y$ jest przestrzenią zwartą, a $r : \mathbb{Z} \mapsto Y$ zanurzeniem homeomorficznym przestrzeni $\mathbb{Z}$ w $Y$ takim, że $\overline{r(\mathbb{Z})} = Y$.*

Znamy oczywiście jednopunktowe uzwarcenie przestrzeni $\mathbb{Z}$ polegające na "dodaniu punktu w nieskończoności". Nie będziemy się jednak nim szczególnie zajmować, gdyż jest to bardzo prosty przypadek, a dla naszych zastosowań potrzebujemy konstrukcji bez porównania bardziej skomplikowanej. Dalej będziemy często pomijać samo zanurzenie $r$ i myśleć o uzwarceniu jako o pewnej przestrzeni zwartej, które będziemy oznaczać na przykład $r_1\mathbb{Z}$, $r_2\mathbb{Z}$.
Wyjaśnimy teraz, co oznacza równoważność dwóch rozszerzeń zwartych.

**Definicja 1.4.2.** *Rozszerzenia zwarte $r_1\mathbb{Z}$, $r_2\mathbb{Z}$ nazywamy równoważnymi, jeśli istnieje homeomorfizm $f : r_1\mathbb{Z} \mapsto r_2\mathbb{Z}$ taki, że $(f \circ r_1)(n) = r_2(n)$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$.*

Powyższa definicja intuicyjnie oznacza tyle, że dwa rozszerzenia zwarte są równoważne, gdy są homemorficzne oraz jeśli przestrzeń $\mathbb{Z}$ jest w nie tak samo zanurzona.
Określmy teraz rodzinę uzwarceniem przestrzeni $\mathbb{Z}$.

**Definicja 1.4.3.** *Oznaczmy przez $\mathscr{R}(\mathbb{Z})$ rodzinę klas równoważności wszystkich rozszerzeń zwartych (dowodzi się, iż cała ta klasa tworzy zbiór).*

W rodzinie $\mathscr{R}(\mathbb{Z})$ wprowadzamy porządek.

**Definicja 1.4.4.** *Mówimy, że uzwarcenie $r_1\mathbb{Z}$ jest nie mniejsze niż rozszerzenie $r_2\mathbb{Z}$ (piszemy $r_2\mathbb{Z} \leqslant r_1\mathbb{Z}$), gdy istnieje przekształcenie ciągłe $f : r_1\mathbb{Z} \mapsto r_2\mathbb{Z}$ spełniające $fr_1 = r_2$.*

Zachodzi prosty fakt.

**Fakt 1.4.5.** *Zdefiniowana przed chwilą relacja jest częściowym porządkiem w zbiorze $\mathscr{R}(\mathbb{Z})$.*

Mamy również.

**Stwierdzenie 1.4.6.** *W rodzinie $\mathscr{R}(\mathbb{Z})$ istnieje element największy.*

Dochodzimy w ten sposób do kluczowej definicji.

**Definicja 1.4.7.** *Największy element rodziny $\mathscr{R}(\mathbb{Z})$ nazywamy rozszerzeniem maksymalnym lub rozszerzeniem Cecha-Stone'a i oznaczamy symbolem $\beta\mathbb{Z}$.*

Będziemy potrzebować bardziej konstruktywnego opisu $\beta\mathbb{Z}$. Najpierw ważne twierdzenie.

**Twierdzenie 1.4.8.** *Każde przekształcenie ciągłe $f : \mathbb{Z} \mapsto Y$, gdzie $Y$ jest przestrzenią zwartą jest przedłużalne do przekształcenia ciągłego $F : \beta\mathbb{Z} \mapsto Y$. Jeśli każde przekształcenie ciągłe określone na $\mathbb{Z}$ i przyjmujące wartości w przestrzeni zwartej jest przedłużalne na rozszerzenie $\alpha\mathbb{Z}$ przestrzeni $\mathbb{Z}$, to $\alpha\mathbb{Z}$ jest równoważne rozszerzeniu Cecha-Stone'a przestrzeni $\mathbb{Z}$.*

Następne twierdzenie opisuje moc $\beta\mathbb{Z}$.

**Twierdzenie 1.4.9.** *Przestrzeń $\beta\mathbb{Z}$ ma moc $2^{\mathfrak{c}}$.*

Aby dokonać opisu elementów $\beta\mathbb{Z}$ musimy wprowadzić pojęcie filtru i ultrafiltru.

**Definicja 1.4.10.** *Niech $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów $\mathbb{Z}$. Filtrem $\mathscr{F}$ nazywamy rodzinę zbiorów zawartą w $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ spełniającą warunki*

1. *$\emptyset \notin \mathscr{F}$.*
2. *Jeśli $A_1, A_2 \in \mathscr{F}$, to $A_1 \cap A_2 \in \mathscr{F}$.*
3. *Jeśli $A \in \mathscr{F}$ i $A \subset A_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, to $A_1 \in \mathscr{F}$.*

*Ultrafiltrem będziemy nazywać filtr maksymalny (względem relacji inkluzji). Zbiór wszystkich ultrafiltrów na $\mathbb{Z}$ będziemy oznaczać $F(\mathbb{Z})$.*

Ultrafiltry mają własności, które nietrudno sprawdzić.

**Fakt 1.4.11.** *Niech $\mathscr{F} \in F(\mathbb{Z})$ będzie ultrafiltrem. Wtedy*

1. *Jeśli $A_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ i $A_0 \cap A \neq \emptyset$ dla każdego $A \in \mathscr{F}$, to $A_0 \in \mathscr{F}$.*
2. *Jeśli $A_1, A_2 \in \mathscr{F}$ i $A_1 \cup A_2 \in \mathscr{F}$, to $A_i \in \mathscr{F}$ dla pewnego $i$ równego 1 lub 2.*
3. *Jeśli $\mathscr{F} \neq \mathscr{F}' \in F(\mathbb{Z})$, to istnieją $A \in \mathscr{F}$ i $A' \in \mathscr{F}'$ takie, że $A \cap A' = \emptyset$.*

Pewne ultrafiltry są wyróżnione.

**Definicja 1.4.12.** *Każdej liczbie całkowitej $n$ odpowiada ultrafiltr $\mathscr{F}(n) = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) : n \in A\}$, który nazywamy ultrafiltrem głównym (odpowiadającym liczbie $n$). Pozostałe ultrafiltry nazywamy wolnymi, a zbiór wszystkich takich ultrafiltrów będziemy oznaczać $F_0(\mathbb{Z})$.*

Wprowadzimy teraz w zbiorze ultrafiltrów topologię.

**Definicja 1.4.13.** *Niech $w\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cup F_0(\mathbb{Z})$. Dla dowolnego zbioru $U \subset \mathbb{Z}$ przyjmujemy*

$$U^* = U \cup \{\mathscr{F} \in F_0(\mathbb{Z}) : \text{ istnieje } A \in \mathscr{F} \text{ takie, że } A \subset U\} \subset w\mathbb{Z}.$$

*Dla dowolnych $U_1, U_2 \subset \mathbb{Z}$ zachodzą równości $(U_1 \cup U_2)^* = U_1^* \cup U_2^*$, $(U_1 \cap U_2)^* = U_1^* \cap U_2^*$. Ponadto zachodzi również $\mathbb{Z}^* = w\mathbb{Z}$. W związku z tym możemy określić topologię na $w\mathbb{Z}$ przyjmując za jej bazę wszystkie zbiory $U^*$ dla wszystkich $U \subset \mathbb{Z}$. Zbiór $w\mathbb{Z}$ z tak określoną topologią nazywamy rozszerzeniem Wallmana przestrzeni $\mathbb{Z}$.*

Zachodzi kluczowe twierdzenie.

**Twierdzenie 1.4.14.** *Rozszerzeń Wallmana $w\mathbb{Z}$ jest przestrzenią zwartą zawierającą $\mathbb{Z}$ jako podprzestrzeń gęstą. Ponadto, każde przekształcenie ciągłe $f : \mathbb{Z} \mapsto Y$ przestrzeni $\mathbb{Z}$ w przestrzeń zwartą $Y$ jest przedłużalne do przekształcenia $F : w\mathbb{Z} \mapsto Y$.*

W połączeniu z twierdzeniem 1.4.8 otrzymujemy.

**Wniosek 1.4.15.** *Rozszerzenie Wallmana $w\mathbb{Z}$ jest rozszerzeniem zwartym przestrzeni $\mathbb{Z}$ równoważnym rozszerzeniu Cecha-Stone'a $\beta\mathbb{Z}$.*

W ten sposób otrzymaliśmy równoważny opis rozszerzenia Cecha-Stone'a $\beta\mathbb{Z}$, którym będziemy się posługiwać.

**Komentarze i odniesienia do literatury.** Szczegółowy dowody wszystkich faktów przedstawionych w tym podrozdziale można znaleźć w książce [Engelking].

## 1.5. Algebry Banacha

Wprowadzimy teraz podstawowy dla naszych rozważań aparat algebr Banacha.

**Definicja 1.5.1.** *Algebrą zespoloną nazywamy przestrzeń liniową $A$ nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$, w której zdefiniowana jest operacja mnożenia spełniająca warunki*

- $x(yz) = (xy)z$,
- $(x + y)z = xz + yz$, $x(y + z) = xy + xz$,
- $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$,

*dla wszystkich* $x, y, z \in A$ *oraz* $\alpha \in \mathbb{C}$.

**Definicja 1.5.2.** *Jeśli* $A$ *jest algebrą zespoloną będącą jednocześnie przestrzenią Banacha z normą spełniającą nierówność multiplikatywną* $||xy|| \leqslant ||x||||y||$ *i jeżeli do* $A$ *należy element jednostkowy* $e$ *taki, że* $xe = ex = x$ *oraz* $||e|| = 1$, *to* $A$ *nazywa się algebrą Banacha z jedynką.*

Definicja algebry Banacha z jedynką pozwala nam używać także terminów czysto algebraicznych - to znaczy możemy mówić o elementach odwracalnych, nilpotentnych, dzielnikach zera i tym podobnych.

**Uwaga 1.5.3.** *W definicji algebry Banacha wystarczy zakładać, że zachodzi nierówność* $||xy|| \leqslant C||x||||y||$ *dla pewnej uniwersalnej stałej* $C$ *(dowód polega na wykazaniu, iż każda algebra Banacha jest izomorficzna z domkniętą podalgebrą pewnej algebry operatorów, czyli istnieje norma równoważna spełniająca nierówność multiplikatywną).*

**Uwaga 1.5.4.** *Jeśli algebra Banacha* $A$ *nie ma jedynki, to możemy ją zanurzyć w algebrę Banacha z jedynką za pomocą kanonicznej procedury.*

Istotnie, rozważmy zbiór $A_1 = \{(x, \alpha) : x \in A, \alpha \in \mathbb{C}\}$. W zbiorze $A_1$ wprowadzamy operacje przestrzeni liniowej po współrzędnych, zaś mnożenie w $A_1$ określamy jako

$$(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta).$$

Przyjmujemy także $||(x, \alpha)|| = ||x|| + |\alpha|$ oraz $e = (0, 1)$. Wówczas $A_1$ jest algebrą Banacha z jedynką i odwzorowanie $x \mapsto (x, 0)$ jest izometrycznym izomorfizmem $A$ na podprzestrzeń $A_1$ kowymiaru 1.

**Definicja 1.5.5.** *Algebrą Banacha* $A$ *nazywamy przemienną, jeśli dla dowolnych* $x, y \in A$ *zachodzi* $xy = yx$.

**Definicja 1.5.6.** *Niech* $A$ *będzie algebrą Banacha z jedynką. Niezerowy funkcjonał liniowy* $\varphi$ *nazywamy funkcjonałem liniowo-multiplikatywnym (homomorfizmem zespolonym), jeśli zachowuje mnożenie, to znaczy spełnione jest równanie*

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \text{ dla } x, y \in A.$$

Zachodzi proste stwierdzenie.

**Stwierdzenie 1.5.7.** *Niech* $A$ *będzie algebrą Banacha oraz element* $x \in A$ *spełnia* $||x|| < 1$. *Wówczas*

- $e - x$ *jest odwracalny.*
- $|\varphi(x)| < 1$ *dla każdego funkcjonału liniowo-multiplikatywnego* $\varphi$ *na* $A$.

**Wniosek 1.5.8.** *Każdy funkcjonał liniowo-multiplikatywny na algebrze Banacha* $A$ *jest ciągły.*

**Definicja 1.5.9.** *Niech* $A$ *będzie algebrą Banacha. Zbiór elementów odwracalnych algebry* $A$ *będziemy oznaczać przez* $G(A)$.

**Stwierdzenie 1.5.10.** *Dla dowolnej algebry Banacha $A$ zbiór $G(A)$ jest podzbiorem otwartym $A$ i jednocześnie grupą topologiczną.*

Możemy zdefiniować już główne pojęcie.

**Definicja 1.5.11.** *Niech $A$ będzie algebrą Banacha z jedynką. Dla $x \in A$ określamy widmo $\sigma(x)$ elementu $x$ jako zbiór wszystkich liczb zespolonych $\lambda \in \mathbb{C}$ takich, że $\lambda e - x$ nie jest odwracalny. Dopełnienie $\sigma(x)$ nazywamy zbiorem rezolwenty $x$. Promieniem spektralnym nazywamy liczbę $\rho(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$. W przypadku, gdy algebra $A$ nie ma jedynki to określamy widmo w algebrze z dołączoną jedynką.*

Podstawowe własności spektrum elementu opisuje następne twierdzenie.

**Twierdzenie 1.5.12.** *Jeśli $A$ jest algebrą Banacha i $x \in A$, to*

- *widmo $\sigma(x)$ jest niepustym zbiorem zwartym,*
- *promień spektralny $\rho(x)$ spełnia równanie*

$$\rho(x) = \lim_{n\to} ||x^n||^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\geqslant 1} ||x^n||^{\frac{1}{n}}$$

Wprost z definicji dostajemy również poniższą uwagę

**Uwaga 1.5.13.** *Promień spektralny spełnia nierówność $\rho(x) \leqslant ||x||$.*

Zachodzi klasyczne twierdzenie.

**Twierdzenie 1.5.14** (Gelfand-Mazur)**.** *Jeśli $A$ jest algebrą Banacha, w której każdy różny od zera element jest odwracalny, to $A$ jest izometrycznie izomorficzna z ciałem liczb zespolonych.*

**Uwaga 1.5.15.** *Jeśli $A$ jest podalgebrą algebry Banacha $B$, to dla każdego elementu $x \in A$ zachodzi inkluzja $\sigma_B(x) \subset \sigma_A(x)$ (widmo w większej algebrze jest zawarte w widmie w mniejszej algebrze).*

Badaniem ideałów maksymalnych będziemy się zajmować wielokrotnie, wprowadzamy więc kolejne definicje.

**Definicja 1.5.16.** *Podzbiór $M$ przemiennej algebry zespolonej $A$ nazywamy ideałem, jeśli*

- *$M$ jest podprzestrzenią $A$.*
- *$xy \in M$, gdy $x \in A$ i $y \in M$.*

*Jeśli $M \neq A$, to $M$ nazywamy ideałem właściwym. Ideały właściwe, które nie są zawarte w żadnych większych ideałach właściwych nazywamy maksymalnymi.*

Łatwo jest wykazać następne stwierdzenie (korzystając z otwartości zbioru elementów odwracalnych oraz lematu Kuratowskiego-Zorna).

**Stwierdzenie 1.5.17.** *W przemiennej algebrze Banacha $A$ zachodzą następujące fakty*

1. *Każdy ideał właściwy jest zawarty w pewnym ideale maksymalnym.*
2. *Ideały maksymalne są domknięte.*
3. *Żaden ideał właściwy nie zawiera elementów odwracalnych.*

**Wniosek 1.5.18.** *Domknięcie ideału właściwego jest ideałem właściwym.*

**Definicja 1.5.19.** *Niech $f$ będzie funkcjonałem liniowo-multiplikatywnym na przemiennej algebrze Banacha $A$. Oznaczmy jądro $f$ przez $M_f = \{x \in A : f(x) = 0\}$. Teraz, jeśli $M$ jest ideałem maksymalnym, to oznaczmy przez $f_M$ naturalny homomorfizm $A \mapsto A/M = \mathbb{C}$. W ten sposób określiliśmy dwa przyporządkowania $f \mapsto M_f$, $M \mapsto f_M$.*

Dalej otrzymamy równoważność ideałów maksymalnych i funkcjonałów liniowo-multiplikatywnych.

**Twierdzenie 1.5.20.** *Pomiędzy ideałami maksymalnymi algebry $A$ a jej funkcjonałami liniowo-multiplikatywnymi istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość dana przez relację*

$$f \leftrightarrow M_f \ (M \leftrightarrow f_M).$$

**Definicja 1.5.21.** *Niech $A$ będzie przemienną algebrą Banacha z jednością. Określamy przestrzeń ideałów maksymalnych $\mathfrak{M}(A)$ jako zbiór wszystkich ideałów maksymalnych (równoważnie: zbiór wszystkich funkcjonałów liniowo-multiplikatywnych).*

**Definicja 1.5.22.** *Przecięcie wszystkich ideałów maksymalnych algebry $A$ nazywamy radykałem $A$ i oznaczamy* $\mathrm{rad}A$. *Jeśli* $\mathrm{rad}A = \{0\}$, *to $A$ nazywa się algebrą półprostą.*

Możemy już zdefiniować transformatę Gelfanda.

**Definicja 1.5.23.** *Niech $\mathbf{M}(A)$ będzie zbiorem wszystkich zespolonych homomorfizmów przemiennej algebry Banacha $A$. Wzór*

$$\check{x}(h) = h(x)$$

*przyporządkowuje elementowi $x \in A$ funkcję $\check{x} : \mathfrak{M}(A) \mapsto \mathbb{C}$. Takie $\check{x}$ nazywamy transformatą Gelfanda $x$.*

W zbiorze ideałów maksymalnych wprowadzamy topologię.

**Definicja 1.5.24.** *Niech $\check{A}$ będzie zbiorem wszystkich $\check{x}$ dla $x \in A$. Topologią Gelfanda na $\mathfrak{M}(A)$ nazywamy słabą topologię indukowaną przez $\check{A}$ (czyli dokładnie obcięcie słabej-$^*$ topologii do $\mathfrak{M}(A)$). Oczywiście $\widehat{A} \subset C(\mathfrak{M}(A))$. Terminem transformacja Gelfanda określamy odwzorowanie $x \mapsto \check{x}$ algebry $A$ na $\check{A}$.*

Następne twierdzenie opisuje podstawowe własności transformaty Gelfanda.

**Twierdzenie 1.5.25.** *Niech $\mathfrak{M}(A)$ będzie przestrzenią ideałów maksymalnych przemiennej algebry Banacha $A$. Zachodzą następujące fakty.*

1. *$\mathfrak{M}(A)$ jest przestrzenią zwartą.*
2. *Transformacja Gelfanda jest homomorfizmem $A$ na podalgebrę $\check{A}$ algebry $C(\mathfrak{M}(A))$, którego jądrem jest $rad(A)$.*
3. *Dla każdego $x \in A$ obrazem $\check{x}$ jest widmo $\sigma(x)$. Zatem $||\check{x}||_\infty = \rho(x) \leqslant ||x||$.*

Z twierdzenia o wykresie domkniętym wynika łatwo następne twierdzenie.

**Twierdzenie 1.5.26.** *Jeśli $\psi : A \mapsto B$ jest homomorfzimem algebry Banacha $A$ w półprostą algebrą Banacha $B$, to $\psi$ jest ciągłe.*

**Definicja 1.5.27.** *Odwzorowanie $x \mapsto x^*$ zespolonej algebry $A$ w $A$ nazywamy inwolucją na $A$, jeśli posiada ono następujące cztery własności dla wszystkich $x \in A$, $y \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$:*

*1.* $(x+y)^* = x^* + y^*$

*2.* $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$

*3.* $(xy)^* = y^* x^*$

*4.* $x^{**} = x.$

**Definicja 1.5.28.** *Algebrę Banacha $A$ z inwolucją $x \mapsto x^*$ spełniającą*

$$||xx^*|| = ||x||^2$$

*nazywamy $C^*$-algebrą.*

Przemienne $C^*$-algebry mają szczególnie prostą strukturę, i czym mówi twierdzenie Gelfanda-Najmarka.

**Twierdzenie 1.5.29** (Gelfand-Najmark)**.** *Przypuśćmy, że $A$ jest przemienną $C^*$-algebrą z przestrzenią ideałów maksymalnych $\mathfrak{M}(A)$. Transformacja Gelfanda jest wówczas izometrycznym $^*$-izomorfizmem $A$ na $C(\mathfrak{M}(A))$.*

Zauważmy, że jeśli $P$ jest wielomianem, to nie ma wątpliwości, co oznacza symbol $P(x)$ dla dowolnego elementu $x$ pewnej algebry $A$. Tak samo ma się sytuacja z funkcjami całkowitymi (jako zmienną wystarczy wstawić element z algebry Banacha). Umotywowani tymi przykładami wprowadźmy definicję.

**Definicja 1.5.30.** *Powiemy, że funkcja zespolona $f$ określona na obszarze $A$ zawartym w płaszczyźnie zespolonej działa na element $x$ algebry Banacha $A$, jeśli istnieje element $f(x) \in A$ taki, że*

$$\varphi(f(x)) = f(\varphi(x)) \ \text{dla}\ \varphi \in \mathfrak{M}(A).$$

Oczywiście każda funkcja całkowita działa na dowolnym elemencie algebry Banacha. Okazuje się, że aby dostać działanie na ustalonym elemencie wystarczy zażądać holomorficzności w otoczeniu spektrum.

**Twierdzenie 1.5.31.** *Jeśli $f$ jest funkcją analityczną określoną na otoczeniu spektrum elementu $x$ algebry $A$, to $f$ działa na elemencie $x$. Element $f(x)$ jest wyrażony wzorem*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{f(u)}{u-x} du,$$

*gdzie $C_k$ są regularnymi krzywymi zamkniętymi otaczającymi w sumie wszystkie spójne składowe $\sigma(x)$.*

Przykłady

- Niech $X$ będzie przestrzenią zwartą. Wtedy przestrzeń $C(X)$ funkcji ciągłych na $X$ o wartościach zespolonych jest przemienną $C^*$-algebrą. Każdy funkcjonał liniowo-multiplikatywny $\varphi$ na $C(X)$ jest postaci $\varphi(f) = f(x)$ dla każdego $f \in C(X)$ oraz pewnego $x \in X$.

- Niech $l^1(\mathbb{Z})$ będzie przestrzenią Banacha dwustronnych ciągów sumowalnych z modułem. Wprowadzamy w przestrzeni $l^1(\mathbb{Z})$ strukturę algebry określając mnożenie dwóch ciągów $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ wzorem

$$c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} b_k.$$

W ten sposób $l^1(\mathbb{Z})$ staje się algebrą Banacha z jedynką $(\delta_{0n})_{n\in\mathbb{Z}}$. Każdy funkcjonał liniowo-multiplikatywny na $l^1(\mathbb{Z})$ jest określony jako

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{i\tau n} \text{ dla pewnego } \tau \in \mathbb{T} \text{ i } x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Przestrzeń ideałów maksymalnych możemy utożsamiać z okręgiem. Transformata Gelfanda wyznaczona przez element $x \in l^1(\mathbb{Z})$ jest postaci

$$\check{x}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{in\tau}.$$

- W przestrzeni $L^1(\mathbb{R})$ wprowadzamy dobrze znaną operację splotu. Wtedy przestrzeń ideałów maksymalnych algebry $L^1(\mathbb{R})$ można utożsamić z prostą. Ponadto transformata Gelfanda pokrywa się z transformatą Fouriera.

**Komentarze i odniesienia do literatury.** Przystępny wykład teorii algebra Banacha zawierający wszystkie wyliczone w tym podrozdziale fakty można znaleźć w książkach [Rudin3], [Żelazko].

## 1.6. Algebra $l^\infty(\mathbb{Z})$

W tym podrozdziale zbadamy szczegółowo strukturę algebry dwustronnych ciągów ograniczonych $l^\infty(\mathbb{Z})$. Wykorzystując wiedzę o ultrafiltrach uda Nam się opisać przestrzeń ideałów maksymalnych tej algebry oraz jako wniosek przestrzeń $(l^\infty(\mathbb{Z}))^*$.
Wiemy na razie, że zbiór $l^\infty(\mathbb{Z})$ z działaniami po współrzędnych jest przestrzenią Banacha z normą $||a_n||_{l^\infty(\mathbb{Z})} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$. Wprowadzimy teraz w tej przestrzeni strukturę algebry z inwolucją.

**Definicja 1.6.1.** *Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z})$. Określamy iloczyn ciągów $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ jako ciąg $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ zadany wzorem*

$$c_n = a_n \cdot b_n \text{ dla każdego } n \in \mathbb{Z}.$$

*Inwolucję na algebrze $l^\infty(\mathbb{Z})$ określamy jako sprzężenie zespolone każdej współrzędnej.*

Sprawdzenie stosownych warunków jest czystą formalnością, co prowadzi do następującego faktu.

**Fakt 1.6.2.** *Przestrzeń $l^\infty(\mathbb{Z})$ z określonymi przed chwilą działaniami jest przemienną algebrą z inwolucją.*

Łatwo dostrzec, że zachodzi własność silniejsza.

**Fakt 1.6.3.** *$l^\infty(\mathbb{Z})$ jest przemienną $C^*$-algebrą.*

*Dowód.* Istotnie, niech $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z})$. Wtedy

$$||a_n \cdot \overline{a_n}||_{l^\infty(\mathbb{Z})} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |a_n \overline{a_n}| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 = ||a_n||^2_{l^\infty(\mathbb{Z})},$$

czyli zachodzi warunek z definicji $C^*$-algebry, co kończy dowód. □

Ze względu na twierdzenie Gelfanda-Najmarka warto się zastanowić, jakie są ideały maksymalne algebry $l^\infty(\mathbb{Z})$. Przeliczalną ich rodzinę możemy podać bez trudu.

**Fakt 1.6.4.** *Dla każdego $m \in \mathbb{Z}$ określamy zbiór*

$$I_m = \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} : a_m = 0\}.$$

*Wtedy $I_m$ jest ideałem maksymalnym w $l^\infty(\mathbb{Z})$. Funkcjonałem liniowo-multiplikatywnym odpowiadającym ideałowi $I_m$ (to znaczy $I_m = kerh_m$) jest odwzorowanie $h_m : l^\infty(\mathbb{Z}) \mapsto \mathbb{C}$ zadane wzorem $h_m((a_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = a_m$.*

Powyższy fakt jest zupełnie oczywisty, więc czysto ćwiczebnego sprawdzenia nie będziemy tutaj przeprowadzać.
Poszukajmy jednak innych funkcjonałów liniowo-multiplikatywnych na $l^\infty(\mathbb{Z})$. Mając w pamięci wiedzę o ultrafiltrach łatwo zauważyć, że określiliśmy homomorfizm zespolony dla każdego ideału głównego $\mathscr{F} \in \beta\mathbb{Z}$. Przyporządkowanie ultrafiltrowi niegłównemu (wolnemu) funkcjonału liniowo-multiplikatywnego będzie wymagało więcej wysiłku.

**Definicja 1.6.5.** *Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z})$ oraz $\mathscr{F} \in \beta\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}$ będzie ultrafiltrem niegłównym. Przyjmijmy oznaczenie $a := ||a_n||_{l^\infty(\mathbb{Z})}$. Skonstruujemy teraz granicę ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ po ultrafiltrze $\mathscr{F}$, którą będziemy oznaczać*

$$\lim_{\mathscr{F}} a_n.$$

*Niech $K$ będzie kołem o środku w zerze i promieniu $a$ - $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant a\}$. Z definicji normy mamy*

$$a_n \in K \text{ dla każdego } n \in \mathbb{Z}.$$

*Rozważmy teraz zbiory $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : Rez \leqslant 0\} \cap K$, $B_1 = \{z \in \mathbb{C} : Rez \geqslant 0\} \cap K$, $C_1 = A_1 \cap B_1 = \{z \in \mathbb{C} : Rez = 0\} \cap K$ (są to odpowiednio lewe i prawe półkole oraz średnica zawarta w osi urojonej). Określmy również odpowiadające im podzbiory liczb całkowitych, to znaczy $A'_1 = \{n \in \mathbb{Z} : a_n \in A_1\}$, $B'_1 = \{n \in \mathbb{Z} : a_n \in B_1\}$, $C'_1 = \{n \in \mathbb{Z} : a_n \in C_1\}$. Wybierzemy teraz indukcyjnie ciągi zbiorów $D_n \subset \mathbb{C}$ oraz $D'_n \subset \mathbb{Z}$ pozwalające Nam zdefiniować granicę ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ po ultrafiltrze $\mathscr{F}$. Oczywiście zachodzi $A'_1 \cup B'_1 = \mathbb{Z}$. Stąd $A'_1 \in \mathscr{F}$ lub $B'_1 \in \mathscr{F}$. Jeśli tylko jeden z tych zbiorów należy do ultrafiltru $\mathscr{F}$, to przyjmujemy za $D'_1$ właśnie ten zbiór, zaś za $D_1$ podzbiór płaszczyzny zespolonej mu odpowiadający ($A_1$ odpowiada $A'_1$ oraz $B_1$ odpowiada $B'_1$). W przeciwnym wypadku, to znaczy gdy oba zbiory należą do $\mathscr{F}$ mamy $C'_1 = A'_1 \cap B'_1 \in \mathscr{F}$ i określamy $D'_1 = C'_1$ oraz $D_1 = C_1$. Jeśli $D_1 = A_1$, to w następnym kroku rozważamy zbiory $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : Imz \leqslant 0\} \cap A_1$, $B_2 = \{z \in \mathbb{C} : Imz \geqslant 0\} \cap A_1$ oraz $C_2 = A_2 \cap B_2$ (są to odpowiednio lewa dolna i lewa górna ćwiartka koła $K$) i postępując analogicznie jak w kroku pierwszym definiujemy zbiory $D_2$ i $D'_2$ (określając oczywiście wcześniej za pomocą jasnej reguły zbiory $A'_2$, $B'_2$, $C'_2$). Sytuacja nie ulega istotnej zmianie, jeśli $D_1 = B_1$. W przypadku, gdy $D_1 = C_1$ postępujemy podobnie rozważając zbiory $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : Imz \leqslant 0\} \cap C_1$ oraz $B_2 = \{z \in \mathbb{C} : Imz \geqslant 0\} \cap C_1$, $C_2 = A_2 \cap B_2$. Za pomocą tej procedury w sposób jednoznaczny skonstruujemy ciąg zbiorów $D_n \subset \mathbb{C}$ oraz elementów $D'_n$ ultrafiltru $\mathscr{F}$ (w każdym kroku będziemy na przemian rozważać dzielenie poprzedniego na część lewą i prawą bądź górną i dolną, w przypadkach zdegenerowanych, to znaczy gdy zbiór jest odcinkiem lub punktem nie mamy oczywiście żadnego wyboru). Zauważmy teraz, że zbiory $D_n$ są zwarte, zaś zbiory $D'_n$ niepuste (ultrafiltr nie może zawierać zbioru pustego). Ponadto ciąg zbiorów $D_n$ jest zstępujący, a także średnice zbiorów $D_n$ maleją do zera. Spełnione są założenia twierdzenia Cantora (zstępujący ciąg niepustych zbiorów zwartych o średnicach malejących do* *zera ma przecięcie jednopunktowe), czyli istnieje $z \in K$ takie, że*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \{z\}.$$

*Określamy granicę ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ po ultrafiltrze $\mathscr{F}$ jako*

$$\lim_{\mathscr{F}} a_n = z.$$

Zauważmy najpierw, że gdyby nasz wyjściowy ultrafiltr był główny otrzymalibyśmy dokładnie jeden z opisanych w fakcie 1.6.4 funkcjonałów $h_m$.

**Uwaga 1.6.6.** *Niech $\mathscr{F}(m) = \{S \subset \mathbb{Z} : m \in S\}$ będzie ultrafiltrem głównym. Wtedy opisana w definicji* 1.6.5 *granica ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ po ultrafiltrze $\mathscr{F}$ wynosi*

$$\lim_{\mathscr{F}} a_n = h_m((a_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = a_m.$$

Należy poczynić jeszcze jedną obserwację.

**Uwaga 1.6.7.** *Dla każdego ultrafiltru $\mathscr{F} \in \beta\mathbb{Z}$ oraz ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ zachodzi*

$$\lim_{\mathscr{F}} a_n \in \overline{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}}.$$

*Dowód.* Niech $D_n'$ będzie ciągiem elementów ultrafiltru takim, jak w definicji 1.6.5. Niech $a_{n_1}$ będzie dowolnym wyrazem ciągu takim, że $a_{n_1} \in D_1 \setminus D_2$. Dalej, wybierzmy wyraz $a_{n_2} \in D_2 \setminus D_3$. W ten sposób dostaniemy podciąg $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{Z}}$, który jest zbieżny ze względu na fakt, iż ciąg zbiorów $D_n$ jest zstępujący, a więc

$$\lim_{\mathscr{F}} a_n \in \overline{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}}.$$

Opisana konstrukcja może być wykonalna dopiero od pewnego miejsca (na przykład, gdy wszystkie wyrazy ciągu należą do pewnego ustalonego zbioru $D_k$) bądź może się urwać po skończenie wielu krokach, co prowadzi jednak do wybierania podciągów (uogólnionych) stałych, co nie nastręcza żadnych trudności. □

Zobaczymy teraz, że zachodzi również twierdzenie odwrotne.

**Fakt 1.6.8.** *Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z})$ oraz $z \in \overline{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}}$. Wtedy istnieje ultrafiltr $\mathscr{F} \in \beta\mathbb{Z}$ taki, że*

$$\lim_{\mathscr{F}} a_n = z.$$

*Dowód.* Jeśli $z = a_n$ dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$, to możemy wziąć ultrafiltr główny. Załóżmy więc, że $z \in \overline{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}} \setminus (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Zatem istnieje podciąg $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{Z}}$ taki, że

$$\lim_{|k|\to\infty} a_{n_k} = z.$$

Rozważmy zbiór $S = \{n_k : k \in \mathbb{Z}\}$. Zdefiniujmy teraz rodzinę zbiorów $\mathscr{S} = \{A \subset \mathbb{Z} : S \subset A\}$. Sprawdzimy, że jest to filtr. Rzeczywiście $\emptyset \notin \mathscr{S}$. Ponadto, jeśli $B \in \mathscr{S}$ oraz $B \subset J$, to także $S \subset J$, a więc $J \in \mathscr{S}$. Na koniec wystarczy zauważyć, że jeśli $A_1, A_2 \in \mathscr{S}$, to $S \subset A_1 \cap A_2$, więc $A_1 \cap A_2 \in \mathscr{S}$. Z lematu Kuratowskiego-Zorna istnieje ultrafiltr $\mathscr{F}$ zawierający $\mathscr{S}$. Uzasadnimy, że

$$\lim_{\mathscr{F}} a_n = \lim_{|k|\to\infty} a_{n_k} = z.$$

Rozważmy dwa przypadki. Po pierwsze, może się zdarzyć, że w jednym ze zbiorów $A_1$, $B_1$ jest tylko skończenie wiele elementów $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{Z}}$. Niech na przykład będzie to zbiór $A_1$. Wtedy w zbiorze $A_1'$ jest tylko skończenie wiele indeksów podciągu $(n_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Jeśli $A_1' \in \mathscr{F}$, to także $A_1 \cap S \in \mathscr{F}$, co jest oczywistą sprzecznością, bo ten zbiór jest skończony, a żaden ultrafiltr niegłówny nie zawiera zbioru skończonego. Zatem nasza procedura przechodzenia do granicy po ultrafiltrze zwróci $D_1 = B_1$. Druga możliwość jest taka, że oba zbiory $A_1$,$B_1$ zawierają nieskończenie wiele elementów $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{Z}}$. Wtedy definicja granicy po ultrafiltrze daje jeden z tych zbiorów bądź ich przecięcie. Ten przypadek także nie prowadzi do żadnych problemów, gdyż z definicji granicy ciągu w pewnym momencie zajdzie przypadek pierwszy. Jest jasne, że w ten sposób otrzymamy właśnie żądany rezultat (wprost z otoczeniowej definicji granicy ciągu). $\square$

Otrzymujemy teraz wniosek.

**Wniosek 1.6.9.** *Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Wtedy*

$$\bigcup_{\mathscr{F}\in\beta\mathbb{Z}} \left\{\lim_{\mathscr{F}} a_n\right\} = \overline{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}}.$$

Musimy sprawdzić, że przejście od ciągu do jego granicy po ultrafiltrze jest funkcjonałem liniowo-multiplikatywnym.

**Stwierdzenie 1.6.10.** *Niech $\mathscr{F} \in \beta\mathbb{Z}$ będzie ultrafiltrem. Wtedy odwzorowanie $F : l^\infty(\mathbb{Z}) \mapsto \mathbb{C}$ określone wzorem*

$$F((a_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = \lim_{\mathscr{F}} a_n$$

*jest funkcjonałem liniowo-multiplikatywnym.*

*Dowód.* Niech $A_m$, $B_m$ będą ciągami zbiorów należącymi do $\mathscr{F}$ z definicji liczenia granicy ciągów $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ po ultrafiltrze $\mathscr{F}$. Tak samo $C_m$ niech oznacza zbiory należące do $\mathscr{F}$ odpowiadające ciągowi $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Przyjmijmy także

$$\lim_{\mathscr{F}} a_n = a, \ \lim_{\mathscr{F}} b_n = b, \ \lim_{\mathscr{F}} c_n = c.$$

Z definicji dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $m \in \mathbb{N}$ spełniające

$$|\limsup_{A_m} a_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ |\liminf_{A_m} a_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$
$$|\limsup_{B_m} b_n - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ |\liminf_{B_m} b_n - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Z własności granic częściowych dostajemy

$$\lim \sup_{A_m\cap B_m} c_n - a - b \leqslant \limsup_{A_m\cap B_m} a_n + \limsup_{A_m\cap B_m} b_n - a - b < \varepsilon.$$

Z drugiej strony,

$$\liminf_{A_m\cap B_m} c_n - a - b \geqslant \liminf_{A_m\cap B_m} a_n - a + \liminf_{A_m\cap B_m} b_n - b > -\varepsilon.$$

Ostatecznie dostajemy

$$|\limsup_{A_m\cap B_m} c_n - a - b| < \varepsilon, \ |\liminf_{A_m\cap B_m} c_n - a - b| < \varepsilon.$$

Dla dostatecznie dużych $m$ wybór zbiorów w granicy po ultrafiltrze jest jednoznaczny, co prowadzi do tezy.
Multiplikatywność dowodzimy rozkładając ciągu na część urojoną i rzeczywistą, a potem każdą z nich na część dodatnią i ujemną, co pozwala sprowadzić do przypadku dwóch ciągów nieujemnych (z addytywności). Później należy przeprowadzić podobną analizę jak poprzednio. Jednorodność łatwo jest wywnioskować z multiplikatywności (utożsamiając ciąg stały ze stałą). □

Otrzymujemy stąd wniosek.

**Wniosek 1.6.11.** *$\beta\mathbb{Z}$ jest podprzestrzenią $\mathfrak{M}(l^\infty(\mathbb{Z}))$.*

Z twierdzenia Gelfanda-Najmarka oraz faktu, iż $l^\infty(\mathbb{Z})$ jest $C^*$-algebrą wynika, że

$$l^\infty(\mathbb{Z}) \simeq C(\mathfrak{M}(l^\infty(\mathbb{Z})).$$

Korzystając z tego faktu wykażemy, że $\beta\mathbb{Z}$ jest całą przestrzenią ideałów maksymalnych algebry $l^\infty(\mathbb{Z})$.

**Stwierdzenie 1.6.12.** *Istnieje homeomorfizm $\mathfrak{M}(l^\infty(\mathbb{Z})) \simeq \beta\mathbb{Z}$.*

*Dowód.* Określamy odwzorowanie $\Psi : l^\infty(\mathbb{Z}) \mapsto C(\beta\mathbb{Z})$ wzorem

$$\Psi((a_n)_{n\in\mathbb{Z}})(\mathscr{F}) = \lim_{\mathscr{F}} a_n \text{ dla } (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z}) \text{ oraz } \mathscr{F} \in \beta\mathbb{Z}.$$

Z definicji topologii na $\beta\mathbb{Z}$ wyrażenie po prawej stronie jest funkcją ciągłą. Granica po ultrafiltrze jest funkcjonałem liniowo-multiplikatywnym, co prowadzi do wniosku, iż $\Psi$ jest homomorfizmem algebr. Obie występujące tu algebry są półproste, więc jest to homomorfizm ciągły. W połączeniu z twierdzeniem Gelfanda-Najmarka mamy $C(\mathfrak{M}(l^\infty(\mathbb{Z}))) \subset C(\beta\mathbb{Z})$ (jako podprzestrzeń topologiczna). Teraz już łatwo dostajemy $\mathfrak{M}(l^\infty(\mathbb{Z})) \subset \beta\mathbb{Z}$ (jako podprzestrzeń topologiczna). W połączeniu z inkluzją odwrotną dostajemy tezę. □

Możemy teraz podać trzy ciekawe wnioski. Pierwszy wynika wprost z twierdzenia Gelfanda-Najmarka.

**Wniosek 1.6.13.** *Istnieje izometryczny izomorfizm $l^\infty(\mathbb{Z}) \simeq C(\beta\mathbb{Z})$.*

Z twierdzenia Riesza otrzymamy następną obserwację.

**Wniosek 1.6.14.** *Zachodzi następujący opis przestrzeni sprzężonej do $l^\infty(\mathbb{Z})$*

$$(l^\infty(\mathbb{Z}))^* \simeq M(\beta\mathbb{Z}).$$

Korzystając z opisu działania ultrafiltrów na ciągach ograniczonych uzyskujemy kolejny wynik.

**Wniosek 1.6.15.** *Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z})$. Wówczas*

$$\sigma((a_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = \overline{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}}.$$

**Komentarze i odniesienia do literatury.** Przestawione w tym podrozdziale fakty są powszechnie znane, lecz nie potrafię podać stosownego źródła.

## 1.7. Algebra $L^1(\mathbb{T})$

W tym podrozdziale podamy dobrze znane własności algebry $L^1(\mathbb{T})$ oraz zbadamy przestrzeń ideałów maksymalnych tej algebry.
Zaczniemy od definicji współczynników Fouriera funkcji całkowalnych na okręgu.

**Definicja 1.7.1.** *Niech $f \in L^1(\mathbb{T})$ oraz $n \in \mathbb{Z}$. Określamy $n - ty$ współczynnik Fouriera wzorem*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$$

*oraz formalnie szereg Fouriera funkcji $f$ wzorem*

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{int},$$

*symbol $\sim$ służy podkreślaniu, że funkcja $f$ jedynie wyznacza swój szereg Fouriera.*

Zdefiniujemy teraz splot funkcji całkowalnych.

**Definicja 1.7.2.** *Niech $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Określamy splot funkcji $f$ i $g$ wzorem*

$$(f * g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Poniższe twierdzenie opisuje podstawowe własności współczynników Fouriera oraz splotu.

**Twierdzenie 1.7.3.** *Niech $f, g, \in L^1(\mathbb{T})$, $\alpha \in \mathbb{C}$ oraz $n \in \mathbb{Z}$. Zachodzą następujące fakty*

1. $\widehat{f+g}(n) = \widehat{f}(n) + \widehat{g}(n)$.
2. $\widehat{\alpha f}(n) = \alpha\widehat{f}(n)$.
3. $\widehat{\overline{f}} = \overline{\widehat{f}(-n)}$.
4. *Oznaczmy $f_\tau(t) = f(t-\tau)$ dla $\tau \in \mathbb{T}$. Wtedy $\widehat{f_\tau}(n) = \widehat{f}(n)e^{-in\tau}$.*
5. $|\widehat{f}(n)| \leqslant ||f||_{L^1(\mathbb{T})}$.
6. *Splot $f*g$ jest elementem $L^1(\mathbb{T})$ oraz zachodzi nierówność $||f*g||_{L^1(\mathbb{T})} \leqslant ||f||_{L^1(\mathbb{T})}||g||_{L^1(\mathbb{T})}$. Ponadto prawdziwy jest wzór $\widehat{f*g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$.*
7. *Operacja splotu na $L^1(\mathbb{T})$ jest przemienna, łączna i rozdzielna względem dodawania.*
8. *Niech $\chi^n(t) = e^{int}$, wtedy zachodzi następujący wzór $(\chi * f)(t) = \widehat{f}(n)e^{int}$.*

Prostego dowodu tego twierdzenia nie będziemy tutaj przedstawiać, gdyż większa część faktów w nim zawartych zostanie wykazana w większej ogólności (dla miar). Wyciągniemy jednak pewne wnioski.

**Wniosek 1.7.4.** *Niech $f_j, f \in L^1(\mathbb{T})$ oraz $||f_j - f||_{L^1(\mathbb{T})} \to 0$ przy $j \to \infty$, to $widehatf(n) \to \widehat{f}(n)$ jednostajnie przy $j \to \infty$.*

**Wniosek 1.7.5.** *$L^1(\mathbb{T})$ jest przemienną algebrą Banacha z mnożeniem w charakterze splotu.*

**Wniosek 1.7.6.** *Dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ odwzorowanie $L^1(\mathbb{T}) \ni f \mapsto \widehat{f}(n) \in \mathbb{C}$ jest funkcjonałem liniowo-multiplikatywnym algebry $L^1(\mathbb{T})$.*

Zobaczymy teraz, że współczynniki Fouriera rozdzielają punkty algebry $L^1(\mathbb{T})$.

**Fakt 1.7.7.** *Niech $f \in L^1(\mathbb{T})$. Jeśli dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ zachodzi $\widehat{f}(n) = 0$, to $f \equiv 0$.*

Podobnie jak poprzednio, dowód dla miar zawiera w sobie ten przypadek, więc nie będziemy go tutaj przedstawiać. Otrzymujemy stąd następny wniosek.

**Wniosek 1.7.8.** *Algebra $L^1(\mathbb{T})$ jest algebrą półprostą.*

Wykażemy teraz ważny w dalszych zastosowaniach lemat Riemanna-Lebesgue'a.

**Twierdzenie 1.7.9** (Lemat Riemanna-Lebesgue'a)**.** *Niech $f \in L^1(\mathbb{T})$. Wówczas*

$$\lim_{n\to\pm\infty} \widehat{f}(n) = 0$$

*Dowód.* Teza jest oczywista, jeśli $f$ jest wielomianem trygonometrycznym (wtedy ma tylko skończenie wiele niezerowych współczynników). Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy wielomian trygonometryczny $P$ taki, że $||f - P||_{L^1(\mathbb{T})} \leqslant \varepsilon$. Teraz widzimy łatwo, że

$$|\widehat{f}(n)| \leqslant |\widehat{f-P}(n)| + |\widehat{P}(n)| \leqslant \varepsilon + |\widehat{P}(n)|.$$

Przechodząc z $n \to \pm\infty$ uzyskujemy $|\widehat{f}(n)| \leqslant \varepsilon$, co z dowolności $\varepsilon$ kończy dowód. □

**Wniosek 1.7.10.** *Algebra $L^1(\mathbb{T})$ nie ma jedynki.*

*Dowód.* Istotnie, załóżmy, że istnieje $h \in L^1(\mathbb{T})$ takie, że dla każdego $f \in L^1(\mathbb{T})$ zachodzi $f * h = f$. Wtedy dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ musiałoby być $\widehat{f}(n)\widehat{h}(n) = \widehat{f}(n)$. Biorąc za $f$ kolejne charaktery $\chi^n$ uzyskalibyśmy, że $\widehat{h}(n) = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$, co przeczy lematowi Riemanna-Lebesgue'a. □

We wcześniejszym wniosku zauważyliśmy, że operacja brania danego współczynnika Fouriera jest funkcjonałem liniowo-multiplikatywnym na $L^1(\mathbb{T})$. Wykażemy teraz, że są to jedyne funkcjonały liniowo-multiplikatywne na tej algebrze.

**Fakt 1.7.11.** *Każdy funkcjonał liniowo-multiplikatywny na $L^1(\mathbb{T})$ jest postaci $f \mapsto \widehat{f}(n)$ dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$, a więc $\mathfrak{M}(L^1(\mathbb{T})) = \mathbb{Z}$.*

*Dowód.* Rzeczywiście, każdy funkcjonał ciągły $\varphi$ na $L^1(\mathbb{T})$ jest zadany przez pewien element $h \in L^\infty(\mathbb{T})$, a więc jest postaci

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{T}} f(t)h(t)dt \text{ dla } f \in L^1(\mathbb{T}).$$

Sprawdzimy teraz multiplikatywność. Niech $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Wtedy

$$\varphi(f * g) = \int_{\mathbb{T}} (f * g)(t)h(t)dt = \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} f(t-u)g(u)h(t)dudt =$$
$$= \int_{\mathbb{T}} g(u) \left(\int_{\mathbb{T}} f_u(t)h(t)dt\right) du = \int_{\mathbb{T}} g(u)\varphi(f_u)du.$$

Z drugiej strony,

$$\varphi(f)\varphi(g) = \varphi(f)\int_{\mathbb{T}} g(u)h(u)du.$$

Załóżmy teraz, że $\varphi$ nie znika tożsamościowo i weźmy $f \in L^1(\mathbb{T})$ takie, że $\varphi(f) \neq 0$. Równość zachodzi dla dowolnej funkcji $g \in L^1(\mathbb{T})$, a więc $\varphi(f)h(u) = \varphi(f_u)$. Korzystając z ciągłości operatora przesunięcia oraz ciągłości $\varphi$ możemy założyć, że $h$ jest funkcją ciągłą. Dalej otrzymujemy

$$\varphi(f)h(x+y) = \varphi(f_{x+y}) = \varphi((f_x)_y) = \varphi(f_x)h(y) = \varphi(f)h(x)h(y).$$

Zatem $h(x+y) = h(x)h(y)$ dla $x, y \in \mathbb{T}$. Jest to znane równanie funkcyjne, którego jedynym niezerowym rozwiązaniem jest funkcja $h(x) = e^{xt}$ dla pewnego $t \in \mathbb{C}$. Ponadto musi być to funkcja dobrze określona na okręgu, więc $h(x) = e^{-inx}$ dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$, czyli

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-int}dt = \widehat{f}(n) \text{ dla pewnego } n \in \mathbb{Z},$$

co kończy dowód. $\square$

Przejdziemy teraz do badania spektrum funkcji $f \in L^1(\mathbb{T})$. Zgodnie z wnioskiem 1.7.10 algebra $L^1(\mathbb{T})$ nie ma jedynki, więc musimy ją w nią wyposażyć.
Rozważamy więc algebrę $L^1(\mathbb{T}) \oplus \{\alpha\delta\}$. Zamiast stosować kanoniczną procedurę dodawania jedynki będziemy myśleć o naszej algebrze jako podalgebrze algebry $M(\mathbb{T})$, a więc każdy element będzie postaci $f + \alpha\delta$ dla pewnego $f \in L^1(\mathbb{T})$ oraz $\alpha \in \mathbb{C}$ ze zwykłym dodawaniem oraz mnożeniem według reguły

$$(f + \alpha\delta) * (g + \beta\delta) = f * g + \beta f + \alpha g + \alpha\beta\delta \text{ dla } f, g \in L^1(\mathbb{T}) \text{ oraz } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Bez trudu zauważamy, że funkcjonały liniowo-multiplikatywne, które znaleźliśmy wcześniej rozszerzają się w przewidywalny sposób dając przeliczalną rodzinę $h_n \in \mathfrak{M}(L^1(\mathbb{T}) \oplus \{\lambda\delta\})$, gdzie $h_n$ dla $n \in \mathbb{Z}$ jest określony wzorem (poprawność tej formuły wynika łatwo z liniowości oraz faktu, iż każdy funkcjonał liniowo-multiplikatywny przyjmuje wartość 1 na jedynce algebry).

$$h_n(f + \alpha\delta) = \widehat{f}(n) + \alpha.$$

Pozostaje znaleźć pozostałe homomorfizmy zespolone. Nie jest to trudne, gdyż zgodnie z faktem 1.7.11 każdy funkcjonał liniowo-multiplikatywny różny od $h_n$ musi zerować się na całej podalgebrze $L^1(\mathbb{T})$. Widać już teraz (ze względu na liniowość jest wyznaczony przez wartość na $\delta$), że istnieje tylko jeden taki homomorfizm zespolony i jest on postaci

$$h_\infty(f + \alpha\delta) = \alpha.$$

Podsumujmy nasze rozważania w stwierdzeniu.

**Stwierdzenie 1.7.12.** *Każdy funkcjonał liniowo-multiplikatywny na $\mathfrak{M}(L^1(\mathbb{T}) \oplus \{\lambda\delta\})$ jest postaci $h_n$ dla $n \in \mathbb{Z}$ lub $h_\infty$. Zatem dla dowolnego $f \in L^1(\mathbb{T})$ zachodzi*

$$\sigma(f) = \widehat{f}(\mathbb{Z}) \cup \{0\} = \{\widehat{f}(n) : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}.$$

Druga część powyższego stwierdzenia wynika wprost z faktu, iż spektrum dowolnego elementu jest obrazem transformaty Gelfanda wyznaczonej przez ten element.
Ten podrozdział zakończymy ustaleniem struktury topologicznej przestrzeni ideałów maksymalnych algebry $L^1(\mathbb{T}) \oplus \{\lambda\delta\}$. Zgodnie z wcześniejszymi wynikami $\mathfrak{M}(L^1(\mathbb{T}) \oplus \{\lambda\delta\}) = \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Będziemy potrzebować następującego lematu mówiącego, iż topologia przestrzeni zwartej jest "sztywna", to znaczy nie można jej osłabić, aby nie utracić aksjomatu oddzielania Hausdorffa.

**Lemat 1.7.13.** *Niech $(X, \tau_1)$ będzie przestrzenią Hausdorffa oraz $(X, \tau_2)$ będzie przestrzenią zwartą. Załóżmy ponadto, że $\tau_1 \subset \tau_2$. Wtedy $\tau_1 = \tau_2$.*

Przyda nam się również następujący prosty fakt.

**Fakt 1.7.14.** *Niech $X$ będzie zbiorem oraz $\mathcal{F}$ rodziną odwzorowań prowadzących z $X$ do $\mathbb{C}$. Jeśli rodzina odwzorowań $\mathcal{F}$ rozdziela punkty, to słaba topologia indukowana na $X$ przez tę rodzinę jest topologią Hausdorffa.*

Możemy teraz przejść do końcowego wyniku.

**Stwierdzenie 1.7.15.** *Przestrzeń ideałów maksymalnych algebry $L^1(\mathbb{T}) \oplus \{\lambda\delta\}$ jest homeomorficzna z jednopunktowym uzwarceniem przestrzeni dyskretnej $\mathbb{Z}$.*

*Dowód.* Przyjmijmy oznaczenie $A = L^1(\mathbb{T}) \oplus \{\lambda\delta\}$. Ponieważ

$$\lim_{|n|\to\infty} \widehat{f}(n) = 0$$

transformata Gelfanda dowolnego $f \in L^1(\mathbb{T})$ jest funkcją ciągłą w topologii przestrzeni $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, a zatem $\widehat{A} \subset C(\mathbb{Z} \cup \{\infty\})$, czyli słaba topologia indukowana na $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ przez rodzinę odwzorowań $\widehat{A}$ jest słabsza niż topologia na $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Bez trudu dostrzegamy, że $\widehat{A}$ rozdziela punkty $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ (wystarczy w tym celu rozważyć charaktery oraz element $\delta$). Zatem słaba topologia indukowana na $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ przez rodzinę odwzorowań $\widehat{A}$ jest topologią Hausdorffa (fakt 1.7.14). Korzystając z lematu 1.7.13 otrzymujemy równość tych topologii, co kończy dowód. □

**Komentarze i odniesienia do literatury.** Większą część faktów, które zostały tutaj podane można znaleźć w książkach [Katznelson], [Helson]. Analiza przestrzeni ideałów maksymalnych algebry $L^1(\mathbb{T})$ jest wzorowana na tej, co w pozycjach [Rudin],[Rudin2].

## 1.8. Szeregi Fouriera

Będziemy korzystać ze znanych własności szeregów Fouriera. W szczególności, kilkakrotnie użyjemy jąder Fejera, czy de la Valee Poussina. Istotne też będę dla nas własności szeregów Fouriera funkcji całkowalnych z kwadratem.
Zacznijmy od definicji jądra aproksymacyjnego.

**Definicja 1.8.1.** *Jądrem aproksymacyjnym nazywamy ciąg funkcji $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C(\mathbb{T})$ spełniający poniższe warunki*

1. $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_n(t)dt = 1.$$

2. *Istnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $||k_n||_{C(\mathbb{T})} \leqslant C$.*

3. $$\forall_{0<\delta<\pi} \lim_{n\to\infty} \int_\delta^{2\pi-\delta} |k_n(t)|dt = 0$$

Zachodzi ważne twierdzenie uzasadniające termin "jądra aproksymatywne".

**Twierdzenie 1.8.2.** *Niech $X = L^p(\mathbb{T})$ dla $1 < p < \infty$ lub $X = C(\mathbb{T})$ oraz niech ciąg $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie jądrem aproksymatywnym. Wtedy dla każdego $f \in X$ zachodzi*

$$\lim_{n\to\infty} ||f * k_n - f||_X = 0.$$

Ważnymi przykładami jąder aproksymacyjnych są jądra Fejera i de la Valee Poussina.

**Definicja 1.8.3.** *Jądrem Fejera nazywamy ciąg funkcji $\mathbf{K}_n \in C(\mathbb{T})$ określony wzorem*

$$\mathbf{K}_n(t) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ijt} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t}\right)^2.$$

*Jądrem de la Valee Poussina nazywamy ciąg $\mathbf{V}_n(t) = 2\mathbf{K}_{2n+1}(t) - \mathbf{K}_n(t)$.*

Każde z tych jąder ma swoje zalety. Z naszego punktu widzenia istotny jest poniższy fakt.

**Fakt 1.8.4.** *Jądra Fejera i de la Vallee Poussina są jądrami aproksymacyjnymi (w szczególności $||\mathbf{K}_n||_{L^1(\mathbb{T})}$. Ponadto, ciągi $(\mathbf{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathbf{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ są ciągami wielomianów. Zachodzi również następująca własność*

$$\widehat{\mathbf{V}_n}(j) = 1 \text{ dla } |j| \leqslant n+1.$$

Wynika stąd poniższy wniosek.

**Wniosek 1.8.5.** *Jeśli $X = L^p(\mathbb{T})$ $(1 \leqslant p < \infty)$lub $X = C(\mathbb{T})$, to dla każdego $f \in X$ zachodzi*

$$\lim_{n\to\infty} ||f * \mathbf{K}_n - f||_X = 0 \text{ oraz } \lim_{n\to\infty} ||f * \mathbf{V}_n - f||_X = 0.$$

W związku z tym jądra de la Valee Poissena mogę służyć do znalezienia ciągu wielomianów zbieżnego do danej funkcji o tych samych współczynnikach Fouriera, co funkcja graniczna (mamy tu na myśli ciąg $(\mathbf{V}_n * f)_{n\in\mathbb{N}}$, które ma te same współczynniki Fouriera, co $f$ dla $|j| \leqslant n+1$). Dalej, korzystając z faktu, że wymienione wyżej jądra aproksymacyjne są wielomianami uzyskujemy

**Twierdzenie 1.8.6** (Weierstrass). *Zbiór wielomianów jest gęsty w przestrzeni funkcji ciągłych na okręgu.*

Zakończymy ten podrozdział wymienieniem ważnych własności szeregów Fouriera funkcji całkowalnych z kwadratem.

**Twierdzenie 1.8.7** (Riesza-Fischera). *Dla każdego $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ istnieje $f \in L^2(\mathbb{T})$ spełniające*

$$\widehat{f}(n) = a_n \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Zachodzi również twierdzenie ogólniejsze.

**Twierdzenie 1.8.8.** *Odwzorowanie $\mathfrak{F} : L^2(\mathbb{T}) \mapsto {}^2(\mathbb{Z})$ określone wzorem $\mathfrak{F}(f) = (\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ jest izometrycznym izomorfizmem liniowym. W szczególności zachodzi tożsamość $||f||_{L^2(\mathbb{T})} = ||\widehat{f}(n)||_{l^2(\mathbb{Z})}$ dla $f \in L^2(\mathbb{T})$.*

Do tożsamości $||f||_{L^2(\mathbb{T})} = ||\widehat{f}(n)||_{l^2(\mathbb{Z})}$ będziemy odnosić się jako do tożsamości Parsevala.

**Komentarze i odniesienia do literatury.** Opisane w tym podrozdziale fakty są powszechnie znanymi podstawami analizy harmonicznej. Wszystkie wymienione twierdzenia, fakty i wnioski wraz z dowodami można znaleźć w książkach [Helson], [Katznelson].

# Rozdział 2

# Podstawowe własności algebry $M(\mathbb{T})$

## 2.1. Różne definicje splotu

Zdefiniowaliśmy już $M(\mathbb{T})$ jako przestrzeń unormowaną regularnych miar borelowskich na okręgu i używając twierdzenia Riesza uzasadniliśmy, że jest to przestrzeń Banacha. Zadamy teraz na $M(\mathbb{T})$ strukturę algebry. Będziemy często pomijać indeks normy, więc $||\mu|| = ||\mu||_{M(\mathbb{T})}$ dla $\mu \in M(\mathbb{T})$.

**Definicja 2.1.1.** *Niech $\mu, \lambda \in M(\mathbb{T})$ oraz niech $\mu \times \lambda$ będzie miarą produktową na $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$. Z każdym zbiorem borelowskim $E \in \mathbb{T}$ zwiążmy zbiór $E_{(2)} = \{(x, y) \in \mathbb{T}^2 : x + y \in E\}$. Wtedy $E_{(2)}$ jest borelowskim podzbiorem $\mathbb{T}^2$. Określamy splot miar $\mu$ i $\lambda$ wzorem*

$$(\mu * \lambda)(E) = (\mu \times \lambda)(E_{(2)}) \text{ dla borelowskich } E \subset \mathbb{T}.$$

W poniższym twierdzeniu udowodnimy podstawowe własności zdefiniowanej przed chwilą operacji.

**Twierdzenie 2.1.2.** *Niech $\mu, \lambda \in M(\mathbb{T})$. Wtedy*

1. $\mu * \lambda \in M(\mathbb{T})$.

2. *Splot jest przemienny, łączny i rozdzielny względem dodawania.*

3. $||\mu * \lambda|| \leqslant ||\mu|| \cdot ||\lambda||$.

*Dowód.* Z twierdzenia o rozkładzie Jordana widzimy, że punkt 1. wystarczy dowodzić dla miar nieujemnych. Skoro $\mu \times \lambda$ jest miarą na $\mathbb{T}^2$ to oczywiście $(\mu * \lambda)(E) = \sum(\mu * \lambda)(E_i)$, jeśli $E$ jest sumą parami rozłącznych zbiorów borelowskich $E_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Zatem $\mu * \lambda$ jest miarą. Pozostaje sprawdzić regularność. Jeśli $E$ jest podzbiorem borelowskim $\mathbb{T}$ i ustalimy $\varepsilon > 0$, to regularność $\mu \times \lambda$ pokazuje, że istnieje zbiór zwarty $K \subset E_{(2)}$ spełniający

$$(\mu \times \lambda)(K) > (\mu \times \lambda)(E_{(2)}) - \varepsilon.$$

Jeśli $C$ jest obrazem $K$ przy odwzorowaniu $(x, y) \mapsto x + y$, to $C$ jest zwartym podzbiorem $E$, $K \subset C_{(2)}$, a zatem

$$(\mu * \lambda)(C) = (\mu \times \lambda)(C_{(2)}) \geqslant (\mu \times \lambda)(K) > (\mu * \lambda)(E) - \varepsilon.$$

To kończy dowód pierwszego warunku regularności miary. Warunek drugi uzyskujemy z powyższego rozumowania przez przejście do dopełnień, co kończy dowód punktu 1.

Ze względu na przemienność $\mathbb{T}$ warunek $x + y \in E$ jest równoważny warunkowi $y + x \in E$, a więc $\mu * \lambda = \lambda * \mu$. Najprostszy dowód łączności prowadzi przez rozszerzenie definicji splotu do $n$ miar $\mu_1, \ldots, \mu_n \in M(\mathbb{T})$. Podobnie jak wcześniej z każdym zbiorem borelowskim $E \subset \mathbb{T}$ związujemy zbiór

$$E_{(n)} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{T}^n : x_1 + \ldots + x_n \in E\}$$

i określamy

$$(\mu_1 * \mu_2 * \ldots * \mu_n)(E) = (\mu_1 \times \mu_2 \times \ldots \times \mu_n)(E_{(n)}),$$

gdzie miara po prawej stronie to zwykła miara produktowa na $\mathbb{T}^n$. Teraz łączność splotu wynika wprost z twierdzenia Fubiniego. Rozdzielność splotu względem dodawania jest jasna z definicji i nie będziemy się nad tym zatrzymywać. Dowód części 2. został więc zakończony. Niech $\chi_E$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru borelowskiego $E \subset \mathbb{T}$. Definicja $(\mu*\lambda)(E)$ jest równoważna równaniu

$$\int_{\mathbb{T}} \chi_E d(\mu * \lambda) = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \chi_E(x + y) d\mu(x) d\lambda(y).$$

Zatem, jeśli $f$ jest funkcją prostą, to otrzymujemy

$$\int_{\mathbb{T}} f d(\mu * \lambda) = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} f(x + y) d\mu(x) d\lambda(y). \tag{2.1}$$

Każda ograniczona funkcja borelowska jest jednostajną granicą ciągu funkcji prostych, więc powyższa równość zachodzi dla dowolnej ograniczonej funkcji borelowskiej $f$ (tę równość można traktować jako definicję splotu - szczegóły dalej). Weźmy teraz dowolną ograniczoną funkcję borelowską taką, że $|f(x)| \leqslant 1$ dla wszystkich $x \in \mathbb{T}$. Wtedy $| \int_{\mathbb{T}} f(x+y) d\mu(x)| \leqslant ||\mu||$ dla wszystkich $y \in \mathbb{T}$, więc prawa strona równania 2.1 nie przekracza $||\mu|| \cdot ||\lambda||$, co kończy dowód części 3. □

**Definicja 2.1.3.** *Określamy deltę Diraca w punkcie $\tau \in \mathbb{T}$ jako miarę o masie 1 skupionej w punkcie $\tau$, czyli $\delta_\tau(E) = 1$, jeśli $\tau \in E$ oraz $\delta_\tau(E) = 0$ w przeciwnym przypadku.*

Mówiąc o delcie Diraca w zerze będziemy często pomijać dolny wskaźnik, czyli $\delta = \delta_0$. Bez trudu dostrzegamy, że jest to element neutralny dla mnożenia splotowego (to znaczy spełnia $\delta * \mu = \mu$ dla każdego $\mu \in M(\mathbb{T})$), co prowadzi do poniższego wniosku.

**Wniosek 2.1.4.** *$M(\mathbb{T})$ jest przemienną algebrą Banacha z jedynką, jeśli mnożenie zdefiniujemy jako splot.*

Umotywowani trzecią częścią dowodu twierdzenia 2.1.2 podamy teraz inną definicję splotu przypominającą definicję splotu funkcji. Zaczniemy od prostszego przypadku - to znaczy, gdy jedna z miar jest zadana przez funkcję ciągłą.

**Definicja 2.1.5.** *Niech $h \in C(\mathbb{T})$. Określamy splot miary $\mu \in M(\mathbb{T})$ z funkcją $h$ jako funkcję ciągłą wzorem*

$$(\mu * h)(x) = \int_{\mathbb{T}} h(x - t) d\mu(t)$$

Możemy teraz zdefiniować splot dwóch miar.

**Definicja 2.1.6.** *Niech $\mu, \nu \in M(\mathbb{T})$. Splotem miar $\mu * \nu$ nazywamy miarę, której wartość jako funkcjonału liniowego na funkcji $h \in C(\mathbb{T})$ wynosi $[\mu * (\nu * h)](0)$.*

Sprawdzimy teraz, że powyższa definicja jest poprawna.

**Fakt 2.1.7.** *Wzór z definicji 2.1.6 określa ciągły funkcjonał liniowy na $C(\mathbb{T})$ o normie spełniającej nierówność $||\mu * \nu|| \leqslant ||\mu|| \cdot ||\nu||$.*

*Dowód.* Oczywiście określone przyporządkowanie zadaje funkcjonał liniowy, pozostaje więc sprawdzić ograniczoność i nierówność multiplikatywną. Z definicji mamy nierówność

$$|\mu * (\nu * h)(0)| \leqslant ||\mu|| ||\nu * h||_{\infty}.$$

Dalej, korzystając z definicji splotu miary z funkcją mamy $||\nu * h||_{\infty} \leqslant ||\nu|| ||h||_{\infty}$. Co ostatecznie doprowadza nas do nierówności

$$||\mu * \nu|| \leqslant ||\mu|| ||\nu||$$

kończącej dowód faktu. □

Jest jasne, że rozpisanie całek występujących w tej definicji $\mu * \nu$ doprowadzi do równania 2.1, a więc obie definicje są równoważne.
Stosując twierdzenie Fubiniego bądź wybierając ciąg funkcji zbieżnych do funkcji charakterystycznej ustalonego zbioru domkniętego $E$ otrzymamy, korzystając z regularności, kolejną definicję splotu miar.

**Definicja 2.1.8.** *Niech $\mu, \nu \in M(\mathbb{T})$. Splot miar $\mu, \nu$ możemy określić równością*

$$(\mu * \nu)(E) = \int_{\mathbb{T}} \mu(E - t) d\nu(t) \text{ dla dowolnego borelowskiego } E \subset \mathbb{T}.$$

**Komentarze i odniesienia do literatury.** Pierwsza definicja splotu pochodzi z książki [Rudin3]. Opis splotu taki, jak w definicji 2.1.6, jest szczegółowo przedstawiony w książce [Helson]. W każdej z książek [Rudin3], [Helson], [Katznelson] definicje 2.1.6, 2.1.8 są używane zamiennie.

## 2.2. Proste twierdzenia strukturalne

Zauważmy, że dowolna funkcja $f \in L^1(\mathbb{T})$ zadaje miarę $\mu_f \in M(\mathbb{T})$ wzorem

$$\mu_f(E) = \int_E f(x) dx.$$

Oczywiście taka miara jest absolutnie ciągła. Odwrotnie, z twierdzenia Radona-Nikodyma wynika, że każda miara absolutnie ciągła $\mu \in M(\mathbb{T})$ jest postaci $\mu_f$ dla pewnego $f \in L^1(\mathbb{T})$. Pamiętając, że $||f||_{L^1(\mathbb{T})} = ||\mu_f||$ możemy traktować $L^1(\mathbb{T})$ jako podzbiór $M(\mathbb{T})$.
Zajmiemy się teraz własnościami typowych ideałów i podalgebr $M(\mathbb{T})$. W tym celu wprowadzimy oznaczenia $M_c(\mathbb{T})$ oraz $M_d(\mathbb{T})$ oznaczające odpowiednio zbiór miar ciągłych i zbiór miar dyskretnych.

**Twierdzenie 2.2.1.** *Zbiory $L^1(\mathbb{T})$, $M_d(\mathbb{T})$, $M_c(\mathbb{T})$ mają następujące własności.*

1. *$L^1(\mathbb{T})$ i $M_c(\mathbb{T})$ są domkniętymi ideałami w $M(\mathbb{T})$.*

2. *$M_d(\mathbb{T})$ jest domkniętą podalgebrą $M(\mathbb{T})$.*

*Dowód.* Skorzystamy z trzeciej definicji splotu (definicja 2.1.8), czyli

$$(\mu * \lambda)(E) = \int_{\mathbb{T}} \mu(E - y) d\lambda(y) \text{ dla każdego borelowskiego } E \subset \mathbb{T}.$$

Niech teraz $\mu$ będzie absolutnie ciągła i niech $|E| = 0$. Wtedy $|E - y| = 0$ dla każdego $y \in \mathbb{T}$. Zatem $\mu(E - y) = 0$, a więc także $(\mu * \lambda)(E) = 0$ dla każdego $\lambda \in M(\mathbb{T})$. Stąd $\mu * \lambda$ jest absolutnie ciągła, a więc $L^1(\mathbb{T})$ jest ideałem w $M(\mathbb{T})$. Ponadto $||f||_{L^1(\mathbb{T})} = ||\mu_f||$, a więc zupełności $L^1(\mathbb{T})$ wynika teraz domkniętość ideału miar absolutnie ciągłych.
Fakt, iż miary ciągłe tworzą ideał jest oczywisty z używanej w tym dowodzie definicji splotu (biorąc dowolny przeliczalny zbiór $E$ widzimy, że o ile $\mu$ jest ciągła, to dla każdego $y \in \mathbb{T}$ $\mu(E - y) = 0$, a więc $(\mu * \lambda)(E) = 0$, stąd $\mu * \lambda$ jest miarą ciągłą dla każdego $\lambda \in M(\mathbb{T})$).
Pozostaje sprawdzić domkniętość tego ideału. Niech $E$ będzie zbiorem przeliczalnym oraz weźmy ciąg $\mu_n \in M_c(\mathbb{T})$ takich, że $||\mu_n - \mu|| \to 0$. Wtedy

$$|\mu(E)| = |(\mu - \mu_n)(E)| \leqslant |\mu - \mu_n|(E) \leqslant ||\mu - \mu_n||.$$

Zatem $\mu(E) = 0$, a więc $\mu \in M_c(\mathbb{T})$, czyli $M_c(\mathbb{T})$ jest ideałem domkniętym.
Cześć 2. wynika w prosty sposób z faktu, iż splot dwóch miar dyskretnych jest miarą dyskretną. □

**Komentarze i odniesienia do literatury.** Informacje zawarte w tym podrozdziale pochodzą w całości z książki [Rudin3].

## 2.3. Współczynniki Fouriera-Stieltjesa miary

W tym podrozdziale zbadamy najprostsze własności zasadniczego dla naszych rozważań narzędzia - współczynników Fouriera-Stieltjesa miary. Zacznijmy od definicji.

**Definicja 2.3.1.** *Niech $\mu \in M(\mathbb{T})$. Dla liczby całkowitej $n \in \mathbb{Z}$ określamy $n$-ty współczynnik Fouriera-Stieltjesa miary wzorem*

$$\widehat{\mu}(n) = \int_{\mathbb{T}} e^{-int} d\mu(t).$$

*Ciąg $(\widehat{\mu}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ nazywamy ciągiem Fouriera-Stieltjesa miary. Jest to ciąg ograniczony, dla którego spełniona jest nierówność $||\widehat{\mu}||_{l^\infty(\mathbb{Z})} \leqslant ||\mu||_{M(\mathbb{T})}$.*

Zauważmy, że $\widehat{\mu}(n)$ jest wartością $\mu$ traktowanego jako funkcjonał na $C(\mathbb{T})$ na funkcji ciągłej $\chi^{-n}$ ($\chi^n(t) = e^{-int}$), czyli $\widehat{\mu}(n) =< \mu, \chi^{-n} >$.
Wygodnie będzie przyjąć oznaczenie na zbiór tych ciągów, które są ciągami Fouriera-Stieltjesa pewnej miary $\mu \in M(\mathbb{T})$, co prowadzi do następnej definicji.

**Definicja 2.3.2.**

$$B(\mathbb{Z}) = \{(a_n)_{n=-\infty}^{\infty} \in l^\infty(\mathbb{Z}) : a_n = \widehat{\mu}(n) \textit{ dla pewnego } \mu \in M(\mathbb{T}) \textit{ oraz każdego } n \in \mathbb{Z}\}$$

W następnym podrozdziale podamy warunek konieczny i dostateczny dla ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z})$, aby był on elementem $B(\mathbb{Z})$.
W poniższym twierdzeniu zbadamy podstawowe własności współczynników Fouriera-Stieltjesa miary.

**Twierdzenie 2.3.3.** *Niech $\sigma, \mu, \lambda \in M(\mathbb{T})$.*

1. *Jeśli $\sigma = \mu * \lambda$, to $\widehat{\sigma}(n) = \widehat{\mu}(n) \cdot \widehat{\lambda}(n)$ dla $n \in \mathbb{Z}$. Zatem odwzorowanie $\mu \mapsto \widehat{\mu}(n)$ jest funkcjonałem liniowo-multiplikatywnym na $M(\mathbb{T})$.*

2. *Zbiór $B(\mathbb{Z})$ jest zamknięty na przesunięcia, mnożenie przez charaktery oraz na sprzężenie zespolone.*

*Dowód.* Ustalmy $n \in \mathbb{Z}$. Korzystając z drugiej definicji splotu (definicja 2.1.6) mamy

$$\widehat{\sigma}(n) = \int_{\mathbb{T}} e^{-inz} d(\mu * \lambda)(z) = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} e^{-in(x+y)} d\mu(x) d\lambda(y) =$$
$$= \int_{\mathbb{T}} e^{-inx} d\mu(x) \int_{\mathbb{T}} e^{-iny} d\lambda(y) = \widehat{\mu}(n) \cdot \widehat{\lambda}(n)$$

Zatem odwzorowanie $\mu \mapsto \widehat{\mu}(n)$ jest multiplikatywne. Liniowość tego odwzorowania wynika wprost z definicji, co kończy dowód punktu 1.
Dla dowodu punktu 2. weźmy dowolną miarę $\mu \in M(\mathbb{T})$ oraz liczbę $n_0 \in \mathbb{Z}$ i rozważmy miarę $\lambda \in M(\mathbb{T})$ określoną równością $d\lambda(x) = e^{in_0x} d\mu(x)$. Wtedy $\widehat{\lambda}(n) = \widehat{\mu}(n - n_0)$, czyli $B(\mathbb{Z})$ jest zamknięte na przesunięcia. Teraz określmy miarę $\lambda \in M(\mathbb{T})$ wzorem $\lambda(E) = \mu(E - x)$ dla $x \in \mathbb{T}$, wtedy $\widehat{\lambda}(n) = e^{inx} \widehat{\mu}(n)$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$, a więc $B(\mathbb{Z})$ jest zamknięte na mnożenie przez charaktery. Na koniec, rozważmy inwolucję na $M(\mathbb{T})$, czyli miarę $\widetilde{\mu}(E) = \overline{\mu(-E)}$. Wtedy dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ mamy $\widehat{\widetilde{\mu}}(n) = \overline{\widehat{\mu}(n)}$, co pokazuje, że zbiór $B(\mathbb{Z})$ jest zamknięty na sprzężenie zespolone i kończy dowód. □

Zauważmy, że w dowodzie drugiego punktu sformułowaliśmy formalne operacje przechodzenia od ciągu Fouriera-Stieltjesa do ciągu Fouriera-Stieltjesa miary powstałej przez typowe operacje takie, jak przesuwanie, mnożenie przez charaktery i branie inwolucji na algebrze $M(\mathbb{T})$, co prowadzi do następującego wniosku.

**Wniosek 2.3.4.** *Niech $\mu \in M(\mathbb{T})$. Zachodzą następujące wzory.*

- *Jeśli miara $\lambda \in M(\mathbb{T})$ spełnia $d\lambda(x) = e^{in_0x} d\mu(x)$, to $\widehat{\lambda}(n) = \widehat{\mu}(n - n_0)$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ (mnożeniu miary przez charakter odpowiada przesuwanie współczynników Fouriera-Stieltjesa).*

- *Jeśli miar $\lambda \in M(\mathbb{T})$ jest określona równością $\lambda(E) = \mu(E - x)$ dla $x \in M(\mathbb{T})$, to $\widehat{\lambda}(n) = e^{inx} \widehat{\mu}(n)$ dla $n \in \mathbb{Z}$ (przesuwaniu miary odpowiada mnożenie współczynników Fouriera-Stieltjesa przez charakter).*

- *Jeśli $\widetilde{\mu}(E) = \overline{\mu(-E)}$, to $\widehat{\widetilde{\mu}}(n) = \overline{\widehat{\mu}(n)}$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ (inwolucji na algebrze $M(\mathbb{T})$ odpowiada sprzężenie współczynników Fouriera-Stieltjesa miary).*

Bez trudu możemy sprawdzić, że odwzorowanie $\mu \mapsto \widetilde{\mu}$ jest inwolucją na algebrze $M(\mathbb{T})$, dzięki czemu możemy wprowadzić następną definicję.

**Definicja 2.3.5.** *Algebra $M(\mathbb{T})$ wraz z odwzorowaniem $\mu \mapsto \widetilde{\mu}$ jest algebrą Banacha z inwolucją.*

Zobaczymy teraz, iż współczynniki Fouriera-Stieltjesa rozdzielają punkty algebry $M(\mathbb{T})$.

**Fakt 2.3.6.** *Niech $\mu \in M(\mathbb{T})$. Jeśli $\widehat{\mu}(n) = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$, to $\mu \equiv 0$.*

*Dowód.* Traktując miarę $\mu$ jako funkcjonał liniowy ciągły na $M(\mathbb{T})$ mamy z założenia $<\mu, \chi^n>= 0$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$. Korzystając z liniowości otrzymujemy równość $<\mu, P>= 0$ dla dowolnego wielomianu trygonometrycznego $P$. Weźmy teraz $f \in C(\mathbb{T})$. Korzystając z gęstości wielomianów trygonometrycznych w $C(\mathbb{T})$, wiemy, że istnieje ciąg wielomianów $P_m$ spełniający

$$\lim_{m\to\infty} ||P_m - f||_{C(\mathbb{T})} = 0.$$

Z ciągłości miary rozumianej jako funkcjonał na $M(\mathbb{T})$ uzyskujemy

$$< \mu, f >=< \mu, \lim_{m\to\infty} P_m >= \lim_{m\to\infty} < \mu, P_m >= 0.$$

Zatem $\mu$ zadaje zerowy funkcjonał na $C(\mathbb{T})$, co prowadzi do konkluzji $\mu \equiv 0$. □

Dostajemy więc wniosek.

**Wniosek 2.3.7.** *Algebra $M(\mathbb{T})$ jest algebrą półprostą.*

Zajmiemy się teraz miarami absolutnie ciągłymi i udowodnimy analogon lematu Riemanna-Lebesgue'a. Najpierw podamy prostą uwagę.

**Uwaga 2.3.8.** *Niech $\mu = \mu_f \in M(\mathbb{T})$ będzie miarą absolutnie ciągłą z gęstością $f$. Wtedy dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ zachodzi $\widehat{\mu}(n) = \widehat{f}(n)$.*

Możemy już przejść do dowodu ważnego twierdzenia.

**Twierdzenie 2.3.9.** *Jeśli $\mu \in M(\mathbb{T})$ jest miarą absolutnie ciągłą względem miary Lebesgue'a, to*

$$\lim_{n\to\pm\infty} \widehat{\mu}(n) = 0.$$

*Dowód.* Z twierdzenia Radona-Nikodyma istnieje $f \in L^1(\mathbb{T})$ spełniające

$$\mu(E) = \int_E f(x)dx \text{ dla } E \subset \mathbb{T} \text{ borelowskich.}$$

Zgodnie z wcześniejszymi uwagami mamy $\widehat{\mu}(n) = \widehat{f}(n)$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$. Stąd teza wynika z lematu Riemanna-Lebesgue'a. □

Ten podrozdział zakończymy obserwacją dotyczącą użyteczności współczynników Fouriera-Stieltjesa przy badaniu słabej* zbieżności miar wynikającą z gęstości wielomianów trygonometrycznych w $C(\mathbb{T})$ oraz twierdzeń pierwszego rozdziału.

**Fakt 2.3.10.** *Niech $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mu \in M(\mathbb{T})$. Ciąg $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega słabo* do miary $\mu$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{k\in\mathbb{Z}} \lim_{n\to\infty} \widehat{\mu_n}(k) = \widehat{\mu}(k) \textit{ oraz ciąg norm } ||\mu_n||_{M(\mathbb{T})} \textit{ jest ograniczony}$$

**Komentarze i odniesienia do literatury.** W przygotowaniu tego paragrafu wzorowałem się głównie na książce [Rudin3]. Podobne informacje można oczywiście znaleźć w książkach [Helson], [Katznelson].

## 2.4. Ciągi dodatnio określone

Zbadamy teraz bardzo istotną własność ciagów liczbowych - dodatnią określoność. Pozwoli ona sformułować warunek konieczny i wystarczający na przynależność ciągu do zbioru $B(\mathbb{Z})$ (zbioru transformat Fouriera-Stieltjesa miar). Zacznijmy od definicji.

**Definicja 2.4.1.** *Ciąg $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ liczb zespolonych nazwiemy dodatnio określonym, gdy dla dowolnego ciągu liczb zespolonych $(c_n)$ takiego, że $c_n = 0$ poza skończoną liczbą $n$ zachodzi*

$$\sum_{m,n} u_{m-n} c_m \bar{c_n} \geqslant 0.$$

Wprost z definicji widzimy, że dodatnia określoność ciągu jest własnością czysto algebraiczną.
Zobaczymy teraz podstawowy (i jak się potem okaże jedyny) przykład ciągu dodatnio określonego.

**Fakt 2.4.2.** *Niech $\mu \in M(\mathbb{T})$ będzie miarą dodatnią. Przyjmijmy $u_n = \widehat{\mu}(n)$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$. Wówczas ciąg $(u_n)$ jest dodatnio określony.*

*Dowód.* Wykonujemy prosty rachunek

$$\sum_{m,n} u_{m-n} c_m \bar{c_n} = \int_{\mathbb{T}} \sum_{m,n} e^{-i(n-m)x} c_m \bar{c_n} d\mu(x) = \int_{\mathbb{T}} |\sum_{n} c_n e^{-inx}|^2 d\mu(x) \geqslant 0$$

□

Wykażemy teraz ważne twierdzenie odwrotne.

**Twierdzenie 2.4.3** (Herglotz)**.** *Każdy dodatnio określony ciąg $(u_n)$ jest ciągiem Fouriera-Stieltjesa pewnej miary dodatniej $\mu \in M(\mathbb{T})$.*

*Dowód.* Ustalmy $N \in \mathbb{N}$ oraz liczbę rzeczywistą $t$. Przyjmijmy $c_n = e^{int}$ dla $n = 0, 1, \ldots, N-1$ i równy zero dla pozostałych $n$. Teraz

$$\sum_{m,n} u_{m-n} c_m \bar{c_n} = \sum_{m,n=0}^{N-1} u_{m-n} e^{(m-n)it} = \sum_{n=-N}^{N} u_n e^{nit}(N - |n|) = N \sum_{n=-N}^{N} u_n e^{int} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right). \tag{2.2}$$

Powyższy rachunek polegał na prostym przenumerowaniu oraz policzeniu, na ile sposobów za pomocą liczb naturalnych $m, n \in \{0, \ldots, N-1\}$ można uzyskać ustaloną liczbę naturalną $k \in \{-N+1, \ldots, N-1\}$. Oznaczmy ostatnie wyrażenie po prawej stronie równania 2.2 przez $P_N$. Z założenia mamy $P_N \geqslant 0$. Wielomian $P_N$ jest więc nieujemny, a stąd $||P_N||_{L^1(\mathbb{T})} = u_0$ dla każdego $N \in \mathbb{N}$. Traktując teraz wielomiany $P_N$ jako miary uzyskujemy $||P_N||_{M(\mathbb{T})} = u_0$, czyli ciąg $P_N$ jest ograniczony w przestrzeni miar. Możemy zatem wybrać podciąg $(P_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$ zbieżny słabo* do pewnej miary $\mu$. Ze słabej* zbieżności wynika zbieżność współczynników Fouriera-Stieltjesa miar, a więc $\widehat{\mu}(n) = u_n$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$. Uzasadnimy teraz, że jest to miara dodatnia. W tym celu weźmy $f \in C(\mathbb{T})$, $f \geqslant 0$. Traktując ponownie wielomiany $P_N$ jako miary możemy napisać

$$< \mu, f >= \lim_{k\to\infty} < P_{N_k}, f >\geqslant 0.$$

Stąd miara $\mu$ jest dodatnia jako funkcjonał na $C(\mathbb{T})$, więc jest miarą dodatnią, co kończy dowód. □

Bez trudu możemy teraz podać kryterium na przynależność ciągu do zbioru $B(\mathbb{Z})$.

**Wniosek 2.4.4.** *Ciąg liczb zespolonych $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ należy do $B(\mathbb{Z})$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci $a_n = b_n - c_n + id_n - ie_n$ dla pewnych dodatnio określonych ciągów $(b_n), (c_n), (d_n), (e_n)$.*

*Dowód.* Teza wniosku wynika od razu z rozkładu dowolnej miary $\mu \in M(\mathbb{T})$ na część rzeczywistą i urojoną, a potem każdy ze składników na część dodatnią i ujemną $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$ oraz twierdzenia Herglotza. □

Korzystając z twierdzenia Herglotza wykażemy teraz pewne własności ciągów dodatnio określonych.

**Fakt 2.4.5.** *Niech $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ będzie ciągiem dodatnio określonym. Wtedy*

1. $|u_n| \leqslant u_0$ *dla* $n \in \mathbb{Z}$,

2. $u_{-n} = \overline{u_n}$ *dla* $n \in \mathbb{Z}$.

*Dowód.* Z twierdzenia Herglotza istnieje miara dodatnia $\mu \in M(\mathbb{T})$ taka, że $\widehat{\mu}(n) = u_n$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$. Punkt 1. wynika od razu z

$$|u_n| = |\widehat{\mu}(n)| \leqslant ||\mu||_{M(\mathbb{T})} = u_0.$$

Aby dowieść punktu 2. zauważmy, że

$$u_{-n} = \widehat{\mu}(-n) = \int_{\mathbb{T}} e^{int} d\mu(t) = \int_{\mathbb{T}} \overline{e^{-int}} d\overline{\mu}(t) = \overline{\int_{\mathbb{T}} e^{-int} d\mu} = \overline{\widehat{\mu}(n)} = \overline{u_n}.$$

□

Na koniec uzasadnimy, iż w przypadku ciągu miar dodatnich wystarczy sprawdzić zbieżność współczynników Fouriera-Stieltjesa (nie dbając o ograniczoność ciągu w normie). Indeks górny w poniższym stwierdzenia oznacza indeks całego ciągu (mamy do czynienia z ciągami ciągów).

**Stwierdzenie 2.4.6.** *Niech $(u_n^k)_{n\in\mathbb{Z}}$ będzie ciągiem dodatnio określonym dla każdego $k \in \mathbb{N}$ oraz $\mu_k \in M(\mathbb{T})$ będą miarami dodatnimi.*

1. *Jeśli dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ zachodzi*

$$\lim_{k\to\infty} u_n^k = u_n,$$

*to ciąg $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ jest dodatnio określony.*

2. *Jeśli dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ ciąg $(\widehat{\mu}_k(n))_{k\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny, to ciąg $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jest słabo$^*$ zbieżny do pewnej miary $\mu$.*

*Dowód.* Punkt 1. jest zupełnie oczywisty - wynika wprost z przejścia do punktowej granicy w warunku definiującym dodatnią określoność.
Aby dowieść punktu 2. przyjmijmy oznaczenia

$$u_n^k = \widehat{\mu}_k(n) \text{ dla } n \in \mathbb{Z} \text{ i } k \in \mathbb{N}$$
$$u_n = \lim_{k\to\infty} u_n^k \text{ dla } n \in \mathbb{Z}$$

Z pierwszego punktu uzyskujemy dodatnią określoność ciągu $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Zatem z twierdzenia Herglotza istnieje miara dodatnia $\mu \in M(\mathbb{T})$ spełniająca $\widehat{\mu}(n) = u_n$ dla $n \in \mathbb{Z}$. Aby wykazać słabą* zbieżność miar $\mu_k$ do miary $\mu$ wystarczy pokazać ograniczoność ciągu $||\mu_k||_{M(\mathbb{T})}$ (zbieżność współczynników Fouriera-Stieltjesa jest założona). Wynika to łatwo z dodatniości miar $\mu_k$. Rzeczywiście,

$$||\mu_k||_{M(\mathbb{T})} = u_0^k \to u_0.$$

Zatem ciąg norm $\mu_k$ jest zbieżny, więc w szczególności ograniczony. □

**Komentarze i odniesienia do literatury.** Szczególnie prosty dowód twierdzenia Herglotza można znaleźć w książce [Helson], z tej książki pochodzą również inne fakty, które tu zamieściłem (są tam podane w formie zadań). Daleko idące uogólnienie twierdzenia Herglotza zwane twierdzeniem Bochnera jest dowodzone na przykład w książce [Rudin3].

## 2.5. Miary dyskretne

W tej części zajmiemy się dwoma zagadnieniami - jak odtworzyć za pomocą współczynników Fouriera-Stieltjesa część dyskretną miary oraz jak wyglądają ciągi tych współczynników dla miar dyskretnych.
Zacznijmy od kilku obserwacji.
Jeśli $\mu \in M_d(\mathbb{T})$, to $\mu = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\delta_{\tau_j}$ dla pewnego ciągu liczb zespolonych $(a_j)$ oraz $\tau_j \in \mathbb{T}$. Bez trudu dostrzegamy, że $||\mu||_{M(\mathbb{T})} = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$, a więc $(a_j) \in l^1(\mathbb{N})$. Zauważmy teraz, że $\delta_\tau * \delta_{\tau'} = \delta_{\tau+\tau'}$, co dla miar dyskretnych $\mu, \nu \in M_d(\mathbb{T})$ postaci $\mu = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\delta_{\tau_j}$, $\nu = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\delta_{\tau'_k}$ prowadzi do wzoru

$$\mu * \nu = \sum_{j,k=1}^{\infty} a_j b_k \delta_{\tau_j+\tau'_k}.$$

Przypomnijmy teraz, że zdefiniowaliśmy na algebrze $M(\mathbb{T})$ inwolucję wzorem $\widetilde{\mu}(E) = \overline{\mu(-E)}$ dla wszystkich borelowskich $E \subset \mathbb{T}$. Wykażemy teraz użyteczny w dalszej części tego podrozdziału lemat.

**Lemat 2.5.1.** *Niech $\mu \in M(\mathbb{T})$. Wtedy*

$$\sum |\mu(\{\tau\})|^2 = (\mu * \widetilde{\mu})(\{0\}).$$

*W szczególności $\mu$ jest miarą ciągłą wtedy i tylko wtedy, gdy $(\mu * \widetilde{\mu})(\{0\}) = 0$.*

*Dowód.* Rozkładając miary $\mu$ i $\widetilde{\mu}$ na części dyskretne i ciągłe $\mu = \mu_d + \mu_c$ oraz $\widetilde{\mu} = \widetilde{\mu}_d + \widetilde{\mu_c}$ możemy zapisać ich splot w postaci

$$\mu * \widetilde{\mu} = (\mu_c * \widetilde{\mu}_c + \mu_c * \widetilde{\mu}_d + \mu_d * \widetilde{\mu}_c) + \mu_d * \widetilde{\mu}_d$$

Miara występująca w nawiasie jest miarą ciągłą (zobacz podrozdział "Proste twierdzenia strukturalne"). Ponadto, jeśli $\mu_d = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\delta_{\tau_j}$, to $\widetilde{\mu}_d = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{a_j}\delta_{\tau_{-j}}$. Zgodnie z komentarzami poprzedzającymi lemat mamy

$$(\mu * \widetilde{\mu})(\{0\}) = (\mu_d * \widetilde{\mu}_d)(\{0\}) = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 = \sum |\mu\{\tau\}|^2,$$

co kończy dowód. □

Pokażemy teraz jak uzyskać masę atomu w danym punkcie za pomocą współczynników Fouriera-Stieltjesa.

**Twierdzenie 2.5.2.** *Niech $\mu \in M(\mathbb{T})$ oraz $\tau \in \mathbb{T}$. Wówczas*

$$\mu(\{\tau\}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{\mu}(n) e^{in\tau}.$$

*Dowód.* Rozważmy ciąg funkcyjny

$$\varphi_N(t) = \frac{1}{2N+1} D_N(t-\tau) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} e^{in\tau} e^{-int}$$

Bez trudu dostrzegamy w definicji $\varphi_N$ ($D_N$ to oczywiście jądro Dirichleta) sumę częściową szeregu geometrycznego, co prowadzi do wniosków: $|\varphi_N| \leqslant 1$ oraz $\varphi_N \to \chi_\tau$. W przypadku drugiego wniosku mamy na myśli zbieżność punktową ciągu $\varphi_N$ do 0 poza punktem $t = \tau$ i do 1 w punkcie $t = \tau$ (w istocie zbieżność jest jednostajna poza dowolnie małym otoczeniem punktu $t = \tau$, lecz nie będzie nam to potrzebne). Korzystając z tych wyników otrzymujemy

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{\mu}(n) e^{in\tau} = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{T}} \varphi_N d\mu = \int_{\mathbb{T}} \chi_\tau d\mu = \mu(\{\tau\}).$$

Aby wejść z granicą pod całkę zastosowaliśmy twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej ($|\varphi_N| \leqslant 1$). □

Łatwo możemy teraz podać dobrze znany wniosek.

**Wniosek 2.5.3** (Wiener)**.** *Dla $\mu \in M(\mathbb{T})$ zachodzi wzór*

$$\sum |\mu(\{\tau\})|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |\widehat{\mu}(n)|^2.$$

*W szczególności $\mu$ jest miarą ciągłą wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |\widehat{\mu}(n)|^2 = 0$$

*Dowód.* Korzystając kolejno z lematu oraz twierdzenia poprzedzających ten wniosek dostajemy

$$\sum |\mu(\{\tau\})|^2 = (\mu * \widetilde{\mu})(\{0\}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{\mu * \widetilde{\mu}}(n) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |\widehat{\mu}(n)|^2.$$

Wykorzystaliśmy tutaj własność $\widehat{\widetilde{\mu}}(n) = \overline{\mu(n)}$ opisywaną wcześniej. □

Granica używana we wniosku to tak zwana granica ciągu $|\widehat{\mu}(n)|^2$ w gęstości. W ten sposób otrzymaliśmy kryterium na ciągłość miary (w terminach współczynnikach Fouriera-Stieltjesa). Zauważmy na koniec, że dla miar absolutnie ciągłych ostatni wniosek jest słabszy od analogonu lematu Riemanna-Lebesgue'a dla miar absolutnie ciągłych.
Przejdźmy teraz do szczegółowego badania współczynników Fouriera-Stieltjesa miar dyskretnych. Naszym głównym celem jest wykazanie, że każdy ciąg okresowy jest ciągiem współczynników Fouriera-Stieltjesa pewnej miary dyskretnej. Przypomnijmy więc na początek, że

bez trudu można uzyskać dowolny ciąg stały. Rzeczywiście, niech $a \in \mathbb{C}$, rozważając miarę $a\delta$ uzyskujemy $\widehat{a\delta}(n) = a\widehat{\delta}(n) = a$. Przyjrzyjmy się teraz dokładniej deltom Diraca w punktach mających skończony rząd w grupie $\mathbb{T}$ (stosujemy notację addytywną). Dla punktu $\pi$ (rzędu dwa) uzyskujemy $\widehat{\delta_\pi}(n) = e^{in\pi} = (-1)^n$, czyli ciąg o okresie dwa. Łatwo także policzyć, że dla punktów $\frac{\pi}{2}$ oraz $\frac{3\pi}{2}$ (rzędu cztery) otrzymujemy

$$\widehat{\delta_{\frac{\pi}{2}}}(n) = e^{in\frac{\pi}{2}} = \begin{cases} 1, \text{ gdy } n \equiv 0(\mathrm{mod}4) \\ i, \text{ gdy } n \equiv 1(\mathrm{mod}4) \\ -1, \text{ gdy } n \equiv 2(\mathrm{mod}4) \\ -i, \text{ gdy } n \equiv 3(\mathrm{mod}4) \end{cases}$$

$$\widehat{\delta_{\frac{3\pi}{2}}}(n) = e^{in\frac{\pi}{2}} = \begin{cases} 1, \text{ gdy } n \equiv 0(\mathrm{mod}4) \\ -i, \text{ gdy } n \equiv 1(\mathrm{mod}4) \\ -1, \text{ gdy } n \equiv 2(\mathrm{mod}4) \\ i, \text{ gdy } n \equiv 3(\mathrm{mod}4) \end{cases}$$

czyli ciągi o okresie 4. Przedstawione przykłady sugerują, że ciąg współczynników Fouriera-Stieltjesa delty Diraca w punkcie rzędu $k$ jest okresowy o okresie $k$. Tak jest w istocie, o czym mówi poniższy fakt (dla dowodu wystarczy zastosować wzór de Moivre'a).

**Fakt 2.5.4.** *Niech $a_k$ będzie elementem rzędu $k$ w grupie $\mathbb{T}$. Wtedy*

$$\widehat{\delta_{a_k}}(n) = \begin{cases} 1, \text{ gdy } n \equiv 0(\mathrm{mod}k) \\ e^{ila_k} \text{ gdy } n \equiv l(\mathrm{mod}k) \end{cases}$$

Zajmijmy się teraz dokładniej naszym wyjściowym zagadnieniem, czyli szukaniem miary dyskretnej o zadanym z góry okresowym ciągu współczynników Fouriera-Stieltjesa. Ustalmy liczbę $k \in \mathbb{N}$ i przyjmijmy oznaczenie $e_k^l(mk+l) = 1$ dla $m \in \mathbb{Z}$ oraz pewnego $l \in \{0, \dots, k-1\}$ oraz $e_k^i(n) = 0$ dla pozostałych $n$. Jest to taki podstawowy ciąg okresowy, mający jedynkę na miejscach postaci $ml$ dla $m \in \mathbb{Z}$, a poza tym zera. Zauważmy teraz, że nasze zadanie będzie rozwiązane, jeśli dla każdego ciągu $e_k^i$ znajdziemy $\mu_k^l \in M_d(\mathbb{T})$ takie, że $\widehat{\mu_k^l}(n) = e_k^l(n)$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$. Istotnie, każdy ciąg okresowy o okresie $k$ powstaje jako kombinacja liniowa ciągów $e_k^l$, a więc wystarczy wziąć odpowiednią kombinację liniową miar $\mu_k^l$. Nasze zadanie można uprościć jeszcze bardziej, mianowicie wystarczy znaleźć miarę $\mu_k^0 \in M_d(\mathbb{T})$. Wtedy określimy pozostałe miary $\mu_k^l \in M_d(\mathbb{T})$ za pomocą warunku $d\mu_k^l = e^{ilt}d\mu_k^0$ i korzystając z odpowiednich własności widzimy, że jest to rozwiązanie naszego zadania. Zauważmy jeszcze, iż można ten proces "przesuwania" opisać dokładniej. Z warunku określającego miary $\mu_k^l$ mamy $\mu_k^l = \widehat{\mu_k^0}(l)\mu_k^0$. Nietrudno policzyć, że

$$\mu_2^0 = \frac{\delta + \delta_\pi}{2} \text{ oraz } \mu_4^0 = \frac{\delta + \delta_\pi + \delta_{\frac{\pi}{2}} + \delta_{\frac{3\pi}{2}}}{4}.$$

Powyższe przykłady sugerują, że każdy miara $\mu_k^0$ powstaje przez zsumowanie delt Diraca we wszystkich punktach, których rzędy dzielą $k$, a następnie podzielenie przez $k$. Sformułujmy więc lemat.

**Lemat 2.5.5.** *Niech $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ miara $\mu_k^0$ jest określona następującym wzorem*

$$\mu_k^0 = \frac{1}{k} \sum_{n|k} \sum_{m=1}^{\varphi(n)} \delta_{a_m^n},$$

*gdzie $a_m^n$ oznacza ustawione w kolejności rosnącej elementy rzędu $n$.*

*Dowód.* Po pierwsze widzimy, że ciąg współczynników Fouriera-Stieltjesa miary $\mu_k^0$ jest okresowy o okresie $k$. Wystarczy więc policzyć $\widehat{\mu_k^0}(r)$ dla $r = 0, 1, \dots, k-1$. Mamy

$$\widehat{\mu_k^0}(0) = \frac{1}{k} \sum_{n|k} \varphi(n) = 1.$$

Policzymy teraz $\widehat{\mu_k^0}(r)$ dla ustalonego $r$, $1 < r < k$. W tym celu wygodnie będzie Nam posłużyć się następującą obserwacją

$$\mu_k^0 * \delta_{a_m^n} = \mu_k^0 \text{ dla } m = 1, \dots, \varphi(n) \text{ oraz } n|k.$$

Jest to fakt należący do czystej algebry, mianowicie zbiór wszystkich elementów rzędu mniejszego równego $k$ na okręgu to dokładnie $k$-elementowa grupa cykliczna $C_k$ (z notacją addytywną). W tym sensie naszej mierze $\mu_k^0$ odpowiada suma wszystkich elementów tej grupy. Teraz, dodawanie ustalonego elementu jest bijekcją na zbiorze elementów grupy. Ze względu na swoją postać element odpowiadający $\mu_k^0$ jest oczywiście punktem stałym każdej bijekcji zbioru elementów grupy.
Aby użyć tej obserwacji weźmy element $a_1^k = \frac{2\pi}{k}$. Mamy $\mu_k^0 * \delta_{\frac{2\pi}{k}} = \mu_k^0$. Zatem $\widehat{\mu_k^0}(r) = e^{\frac{2\pi ir}{k}} \widehat{\mu_k^0}(r)$. Jednakże $r$ jest liczbą naturalną taką, że $1 < r < k$, a więc $e^{\frac{2\pi ir}{k}} \neq 1$, a stąd już dostajemy $\widehat{\mu_k^0}(r) = 0$, co kończy dowód. $\square$

Zauważmy, że dowód lematu jest także rozwiązaniem naszego wyjściowego zadania, a więc zachodzi następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 2.5.6.** *Każdy ciąg okresowy jest ciągiem Fouriera-Stieltjesa pewnej miary dyskretnej.*

Zakończymy ten podrozdział stwierdzeniem opisującym ciąg współczynników Fouriera-Stieltjesa delty Diraca w punkcie, który ma nieskończony rząd w grupie $\mathbb{T}$.

**Stwierdzenie 2.5.7.** *Niech $a$ będzie elementem nieskończonego rzędu w grupie $\mathbb{T}$. Wtedy $\widehat{\delta_a}(\mathbb{Z}) = \{\widehat{\delta_a}(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ jest gęstym podzbiorem okręgu jednostkowego.*

Jest to współcześnie klasyczny fakt z teorii układów dynamicznych (trajektoria obrotu o kąt niewymierny jest gęsta w okręgu).

**Komentarze i odniesienia do literatury.** Pierwsza część (związana z lematem Wienera 2.5.3) jest świetnie opisana w książce [Katznelson]. Druga część tego podrozdziału skupiona wokół twierdzenia 2.5.6 jest zadaniem w książce [Helson], którego własne rozwiązanie zamieściłem. Dowód, iż trajektoria obrotu o kąt niewymierny jest gęsta w okręgu można znaleźć w skrypcie [Zdunik].

## 2.6. Twierdzenie Helsona

W tym podrozdziale udowodnimy bardzo ważne w dalszej części pracy twierdzenie Helsona opisujące wszystkie miary, których zbiór współczynników Fouriera jest skończony.
Będziemy potrzebować dwóch twierdzeń pomocniczych.

**Twierdzenie 2.6.1** (F. i M. Rieszów)**.** *Niech $\mu \in M(\mathbb{T})$ spełnia $\mu(-n) = 0$ dla $n = 1, 2, \dots$. Wtedy $\mu$ jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a.*

Dowodu tego twierdzenia opartego na własnościach funkcji harmonicznych i przestrzeni Hardy'ego nie będziemy tutaj przedstawiać. Warto zaznaczyć, że przez analogię z funkcjami miary spełniające założenie twierdzenia braci Rieszów nazywa się miarami analitycznymi i w związku z tym można je wysłowić następująco: każda miara analityczna jest miarą absolutnie ciągłą.
Następne nietrudne twierdzenie będzie nam także potrzebne w dowodzie głównego wyniku tego podrozdziału.

**Twierdzenie 2.6.2** (Grużewska-Rajchman)**.** *Niech $\mu \in M(\mathbb{T})$. Jeśli istnieje skończona granica*

$$\lim_{n \to -\infty} \widehat{\mu}(n) = a \in \mathbb{C},$$

*to istnieje skończona granica*

$$\lim_{n \to \infty} \widehat{\mu}(n)$$

*i obie te granice są sobie równe.*

*Dowód.* Niech $\lim_{n \to\, -\infty} \widehat{\mu}(n) = a \in \mathbb{C}$. Rozważmy teraz miarę $\nu = \mu - a \cdot \delta$. Wtedy $\lim_{n \to -\infty} \widehat{\nu} = 0$, dlatego bez straty ogólności możemy ograniczyć się do przypadku $a = 0$. Dla dowolnego wielomianu trygonometrycznego $P$ mamy oczywiście $\lim_{n \to -\infty} \widehat{P\mu}(n) = 0$ (wielomian trygonometryczny jest kombinacją liniową charakterów, a mnożenie przez charakter powoduje tylko przesuwanie współczynników Fouriera). Ze względu na gęstość wielomianów trygonometrycznych w przestrzeni $L^1$ rozpatrywanej z miarą $|\mu|$ widzimy, że każda miara absolutnie ciągła względem miary $\mu$ ma tę samą własność (ujemne współczynniki Fouriera-Stieltjesa znikają w nieskończoności). W szczególności dostajemy $\lim_{n \to -\infty} \widehat{\overline{\mu}}(n) = 0$. Zauważmy jednak, że $\widehat{\overline{\mu}}(n) = \widehat{\mu}(-n)$, co prowadzi do równości $\lim_{n \to \infty} \widehat{\mu}(n) = 0$ i kończy dowód. □

Będziemy także potrzebować następującego lematu wynikającego wprost z definicji miary singularnej.

**Lemat 2.6.3.** *Miara dodatnia $\zeta \in M(\mathbb{T})$ jest singularna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór otwarty $G$ spełniający $|G| = 1$ oraz $\zeta(G) < \varepsilon$.*

Teraz możemy już przejść do podstawowego twierdzenia.

**Twierdzenie 2.6.4** (Helson)**.** *Ciąg liczb zespolonych $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, przyjmujący skończenie wartości jest ciągiem Fouriera-Stieltjesa pewnej miary $\mu \in M(\mathbb{T})$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest to ciąg okresowy poza być może skończoną liczbą wyrazów.*

*Dowód.* Zamiana skończenie wielu współczynników Fouriera-Stieltjesa odpowiada dodaniu do miary pewnego wielomianu trygonometrycznego, dlatego w sformułowaniu twierdzenia możemy zakładać, że mamy do czynienia z ciągiem okresowym.
" $\Longleftarrow$ " Fakt, iż ciąg okresowy jest ciągiem Fouriera-Stieltjesa pewnej miary został wykazany wcześniej (zobacz twierdzenie 2.5.6).
" $\Longrightarrow$ " Załóżmy, że ciąg $(a_n)$ nie jest okresowy w prawo. Dla ustalonego $k \in \mathbb{N}$ będziemy rozważać kolejne bloki ciągu $(\alpha_n)$ począwszy od $\alpha_0$. Istnieje $m^k$ różnych bloków, więc rozpatrując kolejne $m^k + 1$ bloków znajdziemy dwa, które się pokrywają. Oznaczmy początek pierwszego z nich przez $b_k$, a drugiego przez $c_k$. Weźmy pod uwagę miarę $\mu - \chi^{b_k - c_k}\mu$. Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami mamy $\mu\widehat{(1 - \chi^{b_k - c_k})}(b_k + j) = 0$ dla $j = 0, \ldots, k-1$. Jeśli jest to miara zerowa, to otrzymujemy sprzeczność z założeniem o nieokresowości. W związku z tym możemy wybrać najmniejszy indeks $d_k \geqslant b_k + k$ taki, że $\mu\widehat{(1 - \chi^{b_k - c_k})}(d_k) \neq 0$. Rozważmy

teraz ciąg miar $\nu_k = \mu(\chi^{d_k} - \chi^{b_k - c_k + d_k})$. Zgodnie z konstrukcją miary $\nu_k$ mają następujące własności

$$\widehat{\nu}(0) \neq 0$$
$$\widehat{\nu}(n) = 0 \text{ dla } n = -k, \ldots, -1$$

Z definicji miary $\nu_k$ uzyskujemy łatwo $||\nu_k||_{M(\mathbb{T})} \leqslant 2||\mu||_{M(\mathbb{T})}$. Możemy zatem z tego ciągu wybrać podciąg słabo* zbieżny do pewnej miary $\nu$. Aby nie komplikować oznaczeń nie będziemy oznaczać miary w wybranym podciągu także przez $\nu_k$. Ponieważ słaba-* zbieżność miar implikuje zbieżność współczynników Fouriera-Stieltjesa miara $\nu$ ma następujące własności

$$\widehat{\nu}(-n) = 0 \text{ dla } n = 1, 2, \ldots \text{ oraz } \widehat{\mu}(0) \neq 0$$

W szczególności jest to miara niezerowa. Ponadto, z twierdzenia braci Rieszów jest to miara absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a. Wykażemy teraz, że jednocześnie jest to miara singularna, co doprowadzi do sprzeczności. W tym celu rozłóżmy naszą miarę na część singularną i absolutnie ciągłą $\mu = \mu_a + \mu_s$. W ten sposób otrzymujemy także rozkład każdej z miar $\nu_k$. Bez trudu dostrzegamy, że

$$\nu_k = \mu_a(\chi^{d_k} - \chi^{b_k - c_k + d_k}) + \mu_c(\chi^{d_k} - \chi^{b_k - c_k + d_k})$$

jest wspomnianym przed chwilą rozkładem.
Zauważmy teraz, że z lematu Riemanna-Lebesgue'a część absolutnie ciągła miary $\nu_k$ dąży do zera przy przejściu do słabej-* granicy. Aby zakończyć dowód twierdzenia wystarczy teraz pokazać, że część singularna miary $\nu_k$ zbiega do miary singularnej $\nu_s$. W tym celu zastosujemy lemat poprzedzający twierdzenie Helsona. Wybierzmy więc zbiór otwarty $G$ taki, że $|\mu|(G) = 1$ oraz weźmy dowolną funkcję ciągłą o nośniku zawartym w $G$ spełniającą $||f||_{C(\mathbb{T})} \leqslant 1$. Wtedy

$$|\int f d\nu_s| = \lim_{k\to\infty} |\int f(\chi^{d_k} - \chi^{b_k - c_k + d_k}) d\mu| \leqslant 2\varepsilon.$$

Z twierdzenia Riesza widzimy jednak, że supremum wyrażenia po lewej stronie wynosi $|\nu_s|(G) \leqslant 2\varepsilon$, co dowodzi, że miara $\nu_s$ jest singularna. $\square$

**Komentarze i odniesienia do literatury.** Twierdzenie Helsona jest rzecz jasna najlepiej opisane w książce [Helson]. Dowody twierdzeń Grużewskiej-Rajchmana i braci Rieszów można w niej także odnaleźć. To ostanie twierdzenie jest bardzo dobrze znane, a jego dowód oraz inne informacje z nim związane można przeczytać również w książce [Rudin2].

# Rozdział 3

# Główne wyniki

## 3.1. Naturalność spektrum i pierwsze pytania

Przechodzimy teraz do głównej części pracy. Będziemy starali się zbadać relację pomiędzy spektrum miary jako elementu algebry $M(\mathbb{T})$ oraz jej współczynnikami Fouriera-Stieltjesa. Widzieliśmy już wcześniej, że wiele ważnych własności miar można odszyfrować analizując ciągi Fouriera-Stieltjesa. Z drugiej strony, o spektrum miary, będące ważnym obiektem chociażby ze względu na możliwość stosowania rachunku funkcyjnego, nie wiemy zbyt wiele. Dlatego bardzo wygodnymi okazałaby się jakieś kryteria, które pozwolą na stwierdzenie, czy spektrum miary jest równe domknięciu zbioru współczynników Fouriera-Stieltjesa, a jeśli nie, to jak bardzo może się ono różnić.
Dla wygody wprowadzimy definicję.

**Definicja 3.1.1.** *Niech $\mu \in M(\mathbb{T})$. Przyjmijmy następujące oznaczenie*

$$F_\mu = \widehat{\mu}(\mathbb{Z}) = \{\widehat{\mu}(n) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

*Określamy spektrum fourierowskie miary jako domknięcie zbioru $F_\mu$, czyli $\overline{F_\mu}$.*

Przejdźmy teraz do prostej obserwacji.

**Fakt 3.1.2.** *Niech $\mu \in M(\mathbb{T})$. Wtedy zachodzi inkluzja*

$$\overline{F_\mu} \subset \sigma(\mu), czyli$$

*spektrum fourierowskie jest podzbiorem spektrum.*

*Dowód.* Wykażemy najpierw, że $F_\mu \subset \sigma(\mu)$. Weźmy $n \in \mathbb{Z}$, zgodnie z definicją spektrum przyjrzyjmy się mierze $\mu - \widehat{\mu}(n)\delta \in M(\mathbb{T})$. Załóżmy, że istnieje $\lambda \in M(\mathbb{T})$ takie, że $(\mu - \widehat{\mu}(n)\delta) * \lambda = \delta$. Obliczając teraz $n-$ty współczynnik Fouriera-Stieltjesa obu stron uzyskujemy $0 = 1$, czyli oczywistą sprzeczność, a więc element $\mu - \widehat{\mu}(n)\delta$ nie jest odwracalny, czyli $\widehat{\mu}(n) \in \sigma(\mu)$, z dowolności $n \in \mathbb{Z}$ dostajemy $F_\mu \subset \sigma(\mu)$. Jeśli $F_\mu(\mathbb{Z})$ jest domknięte, to dowód jest zakończony. W przeciwnym wypadku weźmy $z \in \overline{F_\mu(\mathbb{Z})} \setminus F_\mu(\mathbb{Z})$. Istnieje zatem ciąg $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ taki, że

$$\lim_{k\to\infty} \widehat{\mu}(n_k) = z.$$

Ponownie rozważmy element $\mu - z\delta \in M(\mathbb{T})$ oraz załóżmy, że istnieje $\lambda \in M(\mathbb{T})$ takie, że $(\mu - z\delta) * \lambda = \delta$. Otrzymujemy $(\widehat{\mu}(n_k) - z) \cdot \widehat{\lambda}(n_k) = 1$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Ciąg Fouriera-Stieltjesa dowolnej miary jest ciągiem ograniczonym, więc przechodząc z $k$ do nieskończoności otrzymamy ponownie sprzeczność. □

Taki bardzo elementarny dowód przedstawiliśmy tylko po to, aby zwrócić uwagę, że fakt zawierania się spektrum fourierowskiego w spektrum wynika wprost z definicji. Ten sam fakt można by udowodnić znacznie szybciej w sposób następujący - spektrum dowolnego elementu jest obrazem transformaty Gelfanda wyznaczonej przez ten element. Dalej, wiemy, że przejście od miary do jej współczynnika Fouriera-Stieltjesa (dowolnego) jest funkcjonałem-liniowo multiplikatywnym na algebrze $M(\mathbb{T})$. Zatem obraz transformaty Gelfanda zawiera wszystkie współczynniki Fouriera-Stieltjesa miary, czyli $F_\mu \subset \sigma(\mu)$. Na koniec, przypominamy sobie, że spektrum jest domkniętym podzbiorem płaszczyzny zespolonej, więc $\overline{F_\mu} \subset \sigma(\mu)$. Wprowadzimy teraz kolejną definicję

**Definicja 3.1.3.** *Niech $\mu \in M(\mathbb{T})$. Powiemy, że miara $\mu$ ma naturalne spektrum, jeśli zachodzi*

$$\overline{F_\mu} = \sigma(\mu),$$

*czyli spektrum fourierowskie jest równe całemu spektrum.*

O tej definicji należy myśleć w ten sposób - miary o naturalnym spektrum to miary w pewnym sensie "porządne". Zobaczymy teraz, że miary absolutnie ciągłe spełniają ten warunek.

**Stwierdzenie 3.1.4.** *Niech $\mu = \mu_f \in M(\mathbb{T})$ będzie miarą absolutnie ciągłą z gęstością $f \in L^1(\mathbb{T})$. Wtedy*

$$\overline{F_\mu} = \sigma_{L^1(\mathbb{T})\oplus\{\lambda\delta\}}(f).$$

*Co więcej,*

$$\sigma_{M(\mathbb{T})}(\mu_f) = \sigma_{L^1(\mathbb{T})\oplus\{\lambda\delta\}}(f),$$

*a więc każda miara absolutnie ciągła ma naturalne spektrum.*

*Dowód.* Wykazaliśmy wcześniej, że $\widehat{\mu_f}(n) = \widehat{f}(n)$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$. Mamy także $\overline{F_\mu} \subset \sigma(\mu)$ oraz $\sigma_{L^1(\mathbb{T})\oplus\{\lambda\delta\}}(f) = \widehat{f}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}$. Z lematu Riemanna-Lebesgue'a dostajemy $\widehat{f}(\mathbb{Z}) \cup \{0\} = \overline{\widehat{f}(\mathbb{Z})}$, a zatem $\overline{F_\mu} = \widehat{\mu}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}$ i w końcu $\sigma_{L^1(\mathbb{T})\oplus\{\lambda\delta\}}(f) \subset \sigma(\mu)$. Z drugiej strony $L^1(\mathbb{T}) \oplus \{\lambda e\}$ jest podalgebrą $M(\mathbb{T})$ (nawet domkniętym ideałem), co od razu daje inkluzję przeciwną i kończy dowód obu części stwierdzenia. □

Powyższe stwierdzenie sugeruje postawienie następującego pytania.

**Pytanie 1** (Naturalność spektrum). *Czy każda miara $\mu \in M(\mathbb{T})$ ma naturalne spektrum?*

Rozstrzygnięcie tego zagadnienia jest ściśle związane z kolejnym pytaniem.

**Pytanie 2** (Problem odwrotności). *Niech $\mu \in M(\mathbb{T})$ spełnia warunek $|\widehat{\mu}(n)| > C > 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{Z}$ i pewnej stałej $C > 0$. Czy wynika stąd, że element $\mu$ jest odwracalny w algebrze $M(\mathbb{T})$? Inaczej, niech $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ będzie oddzielonym od zera ciągiem liczb zespolonych takim, że $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in B(\mathbb{Z})$. Czy zachodzi $(\frac{1}{a_n})_{n\in\mathbb{Z}} \in B(\mathbb{Z})$?*

Negatywne rozwiązanie podobnego problemu podali Wiener i Pitt. Zwróćmy teraz uwagę na relację pomiędzy oboma pytaniami. Oczywiście, jeśli miara ma naturalne spektrum, które jest oddzielone od zera, to jest odwracalna, a więc pozytywne rozwiązanie Pytania 1. implikuje pozytywne rozwiązanie Pytania 2. Zobaczymy dalej, że oba pytania są w pewnymi sensie równoważne i mają odpowiedzi przeczące.

**Komentarze i odniesienia do literatury.** Po raz pierwszy problem odwrotności (w nieco innym języku) został postawiony i negatywnie rozwiązany w pracy [Wiener,Pitt]. Dokładniej, wykazali oni, że istnieje miara na prostej (w ich terminologii były to funkcje o wahaniu ograniczonym, których współczynniki Fouriera-Stieltjesa określano jako odpowiednie całki typu Riemanna-Stieltjesa) o oddzielonych od zera współczynnikach Fouriera-Stieltjesa, która nie jest odwracalna.

## 3.2. Fundamentalny przykład i fenomen Wienera-Pitta

W tym podrozdziale podamy przykład będący negatywnym rozwiązaniem obu pytań postawionych poprzednio. Będzie to także pierwsze spotkanie z produktami Riesza, których teorię zgłębimy potem.
Ważną rolę w konstrukcji produktów Riesza odgrywają tzw. ciągi lakunarne. Zacznijmy od definicji.

**Definicja 3.2.1.** *Niech $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb naturalnych. Powiemy, że jest to ciąg lakunarny, jeśli zachodzi warunek*

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} > q > 1 \text{ dla pewnej liczby } q > 1$$

Zauważamy bez trudu, że ciąg geometryczny o ilorazie $q > 1$ spełnia tę definicję. W istocie lakunarność opisuje tempo dążenia do nieskończoności danego ciągu, a dokładniej to, iż każdy wyraz musi być większy niż pewna stała wielokrotność poprzedniego. Ciągiem lakunarnym, którego będziemy teraz używać będzie ciąg $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} = 3^k$. Bardzo istotne są arytmetyczne konsekwencje lakunarności, o których w szczególnym przypadku ciągu $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} = 3^k$ mówi poniższy lemat.

**Lemat 3.2.2.** *Każda liczba naturalna $n$ ma co najwyżej jedno przedstawienie w postaci*

$$n = \sum_k \varepsilon_k 3^k \text{ gdzie } e_k \in \{-1, 0, 1\}.$$

Prostego dowodu powyższego lematu nie będziemy tutaj przedstawiać (zajmiemy się tym zagadnieniem dokładnie później).
Przejdźmy teraz do konstrukcji produktu Riesza. W tym celu rozważmy ciąg funkcji

$$R_N(t) = \prod_{k=1}^{N}(1 + \cos 3^k t) \text{ dla } N \in \mathbb{N} \text{ oraz } t \in \mathbb{T}.$$

Oczywiście $R_N \in C(\mathbb{T})$, a więc możemy mówić o współczynnikach Fouriera tej funkcji. Przyjmijmy oznaczenie $f_k(t) = 1 + \cos 3^k t$. Bez trudu zauważamy, że

$$\widehat{f_k}(n) = \begin{cases} 1 \text{ dla } n = 0 \\ \frac{1}{2} \text{ dla } n = \pm 3^k \\ 0 \text{ w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Aby policzyć współczynniki Fouriera funkcji $R_N$ wygodnie będzie Nam przejść do notacji zespolonej, czyli będziemy stosować wzór Eulera $\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$. Spróbujmy wyobrazić sobie, jak będzie wyglądał iloczyn określający funkcję $R_N$ po wymnożeniu. Widzimy, że będzie to kombinacja liniowa charakterów i każdy charakter będzie postaci $\chi^m$, gdzie $m$ jest przedstawialne w postaci potęg trójki ze współczynnikami $-1, 0, 1$. Zauważmy również, że każda liczba naturalna $m \leqslant 3+9+\ldots+3^N$ wystąpi jako wykładnik pewnego charakteru w tej sumie i to dokładnie jeden raz (wynika to z jednoznaczności przedstawienia). Pozostaje jeszcze znaleźć współczynniki tej kombinacji. Każdy charakter $\chi^m$ powstaje przez wymnożenie charakterów postaci $\chi^{\pm 3^k}$, więc współczynnik wynosi $\left(\frac{1}{2}\right)^s$, gdzie $s$ jest liczbą nietrywialnych elementów w przedstawieniu $m$ jako kombinacji liczb postaci $3^k$. W ten sposób udowodniliśmy poniższy fakt.

**Fakt 3.2.3.** *Współczynniki Fouriera funkcji $R_N$ mają następującą postać:*

$$\widehat{R_N}(n) = \begin{cases} 1 \text{ dla } n=0 \\ 2^{-k} \text{ dla } n = \pm 3^{j(1)} \pm 3^{j(2)} \pm \ldots \pm 3^{j(k)},\ 1 \leqslant j(1) < j(2) < \ldots < j(k) \leqslant N \\ 0 \text{ w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Każdą z funkcji $R_N$ możemy oczywiście traktować jako miarę absolutnie ciągłą z gęstością $R_N$ względem unormowanej miary Lebesgue'a na okręgu. Oczywiście $R_N \geqslant 0$, więc otrzymamy ciąg miar nieujemnych. Takie podejście prowadzi do następującego stwierdzenia.

**Stwierdzenie 3.2.4.** *Ciąg miar $(R_N)_{N\in\mathbb{N}} \in M(\mathbb{T})$ jest słabo-$^*$ zbieżny do miary nieujemnej $R \in M(\mathbb{T})$, której współczynniki Fouriera-Stieltjesa mają następującą postać:*

$$\widehat{R}(n) = \begin{cases} 1 \text{ dla } n=0, \\ 2^{-k} \text{ dla } n = \pm 3^{j(1)} \pm 3^{j(2)} \pm \ldots \pm 3^{j(k)},\ 1 \leqslant j(1) < j(2) < \ldots < j(k), \\ 0 \text{ w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

*Dowód.* Zgodnie z wynikami wcześniejszych podrozdziałów wystarczy sprawdzić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ ciąg $\left(\widehat{R_N}(n)\right)_{N\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny. Nie przedstawia to jednak żadnych trudności - jeśli $n=0$, to mamy do czynienia z ciągiem stałym równym 1, gdy $n$ nie jest przedstawialne w postaci

$$n = \sum_k \varepsilon_k 3^k \text{ gdzie } \varepsilon_k \in \{-1,0,1\},$$

to otrzymujemy ciąg stały równy 0, a w przypadku, gdy istnieje takie przedstawienie otrzymamy ciąg stały od pewnego miejsca. □

Możemy teraz wprowadzić definicję.

**Definicja 3.2.5.** *Miarę $R$ nazywamy produktem Riesza. Mówimy też, że miara $R$ przedstawia produkt $\prod_{k=1}^{\infty}(1+\cos 3^k t)$ i piszemy*

$$R = \prod_{k=1}^{\infty}(1+\cos 3^k t).$$

Równość występującą w definicji należy rozumieć właśnie w ten sposób, że miara $R$ jest słabą$^*$ granicą miar $R_N$ (oczywiście ten iloczyn nieskończony nie ma żadnego znaczenia w sensie klasycznym, gdyż jest rozbieżny w prawie każdym punkcie). Analiza współczynników Fouriera-Stieltjesa prowadzi do następującej uwagi.

**Uwaga 3.2.6.** *Miara $R$ nie jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a.*

*Dowód.* Wystarczy zauważyć, że na przykład $\widehat{R}(3^n) = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, a więc współczynniki Fouriera-Stieltjesa miary $R$ nie dążą do zera, co w połączeniu z lematem Riemanna-Lebesgue'a pokazuje, że nie jest to miara absolutnie ciągła. □

Istnieją więc dwie możliwości - albo miara $R$ ma niezerową część dyskretną, albo niezerową część ciągłą osobliwą względem miary Lebesgue'a. Wykażemy potem, że zachodzi druga możliwość.

**Fakt 3.2.7.** *Produkt Riesza jest miarą ciągłą.*

Możemy teraz podać ważny wniosek.

**Wniosek 3.2.8.** *Produkt Riesza jest miarą ciągłą z niezerową częścią osobliwą względem miary Lebesgue'a.*

Okaże się później, że jest to w istocie miara singularna, czyli jej część absolutnie ciągła jest miarą zerową. Ciężko jest podać konkretne przykłady miar singularnych, co stanowi o ważności produktów Riesza.
Zobaczymy teraz, że przeprowadzona konstrukcja ma znacznie więcej zastosowań - okaże się, że daje ona negatywną odpowiedź na pytanie 1. (o naturalność spektrum) oraz pytanie 2. (problem odwrotności).

**Twierdzenie 3.2.9.** *Niech $R$ będzie produktem Riesza zdefiniowanym wyżej. Wtedy miara $R$ nie ma naturalnego spektrum, czyli*

$$\sigma(R) \neq \overline{F_R}\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1,2,\dots} \cup \{0\} \cup \{1\}.$$

*Dowód.* Załóżmy przeciwnie, to znaczy $\sigma(R) = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1,2,\dots} \cup \{0\}$. Rozważmy zbiory $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{4} - \varepsilon\}$ oraz $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{4} + \varepsilon\}$, gdzie $\varepsilon > 0$ jest tak dobrane, by $A \cap B = \emptyset$. Istnieje funkcja holomorficzna $f$ określona na $A \cup B$ taka, że $f \equiv 0$ na zbiorze $A$ oraz $f \equiv 1$ na zbiorze $B$. Zbiory $A$, $B$ zostały tak dobrane, aby $\sigma(R) \subset (A \cup B)$. Dalej, $A \cup B$ jest zbiorem otwartym, więc z twierdzenia o rachunku funkcyjnym funkcja $f$ działa na mierze $R$, czyli istnieje miara $f(R) \in M(\mathbb{T})$ spełniająca

$$\varphi(f(R)) = f(\varphi(R)) \text{ dla każdego } \varphi \in \mathfrak{M}(M(\mathbb{T})).$$

Przejście od miary do jej współczynnika Fouriera-Stieltjesa jest funkcjonałem liniowo-multiplikatywnym na algebrze $M(\mathbb{T})$, więc

$$\widehat{f(R)}(n) = f(\widehat{R}(n)) \text{ dla każdego } n \in \mathbb{Z}.$$

Z definicji funkcji $f$ oraz postaci współczynników Fouriera-Stieltjesa otrzymujemy

$$\widehat{f(R)}(n) = \begin{cases} 1 \text{ dla } n = \pm 3^k,\ k = 1, 2, \dots \\ 0 \text{ w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

W ten sposób otrzymaliśmy miarę $f(R)$, której ciąg współczynników Fouriera-Stieltjesa przyjmuje dwie wartości, a jednocześnie nie jest okresowy. Jest to sprzeczność z twierdzeniem Helsona, która kończy dowód twierdzenia. □

Zauważmy na początek, że wybór zbiorów $A$ i $B$ był dość arbitralny tak więc z uwzględnieniem stosownych różnic otrzymujemy bez trudu wniosek.

**Wniosek 3.2.10.** *Żaden z punktów postaci $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ nie jest punktem izolowanym spektrum produktu Riesza.*

Widzimy więc, że spektrum może być istotnie większe od spektrum fourierowskiego. Odnotujmy, iż jest to przecząca odpowiedź na pytanie 1.

**Wniosek 3.2.11.** *Istnieją miary, których spektrum nie jest naturalne, czyli odpowiedź na pytanie 1. jest negatywna.*

Nie dowodzi to jednak na razie, że odpowiedź na pytanie 2. jest również negatywna. łatwo jednak wprowadzić stosowną modyfikację.

**Stwierdzenie 3.2.12.** *Istnieje miara $\nu \in M(\mathbb{T})$ taka, że $|\widehat{\nu}(n)| > C > 0$ dla pewnej stałej $C$ i każdego $n \in \mathbb{Z}$, ale $\nu$ nie jest elementem odwracalnym algebry $M(\mathbb{T})$.*

*Dowód.* Wiemy, że istnieje $\lambda \in \mathbb{C}$ taka, że $\lambda \in \sigma(R)$, ale $\lambda \notin \overline{F_R}$. Rozważmy miarę $\nu = R - \lambda\delta$. Wtedy $|\widehat{\nu}(n)| > C > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ i pewnej stałej $C$, ale z definicji spektrum miara $\nu$ nie jest odwracalna. □

W istocie powyższy dowód pokazuje, że pytania 1. i 2. były równoważne, to znaczy mając miarę o spektrum, które nie jest naturalne potrafimy skonstruować miarę, które daje negatywną odpowiedź na problem odwrotności (implikacja przeciwna była wykazana wcześniej). Na koniec tego podrozdziału wprowadzimy definicję i postawimy kolejne pytania.

**Definicja 3.2.13** (Fenomen Wienera-Pitta)**.** *Mówimy, że dla miary $\mu \in M(\mathbb{T})$ zachodzi fenomen Wienera-Pitta, jeśli miara ta nie ma naturalnego spektrum. Równoważnie, jeśli za pomocą tej miary i analogicznego dowodu potrafimy skonstruować miarę nieodwracalną o współczynnikach Fouriera-Stieltjesa oddzielonych od zera.*

W oparciu o powyższe pytania warto postawić następujące pytania.

**Pytanie 3.** *Czy fenomen Wienera-Pitta zachodzi dla wszystkich miar singularnych?*

Zobaczymy dalej, że istnieją miary singularne o naturalnym spektrum, czyli odpowiedź na to pytanie jest negatywna.

**Pytanie 4.** *Jakie własności ma zbiór miar, dla których zachodzi (nie zachodzi) fenomen Wienera-Pitta?*

To pytanie jest innego typu niż pytania poprzednie, ale rozsądną odpowiedź (w algebrze $M_0(\mathbb{T})$) na nie poznamy potem.

**Komentarze i odniesienia do literatury.** Negatywne rozwiązanie problemu odwrotności podobne do opisanego tutaj można znaleźć w artykule [Graham] (jednak z innym finalnym argumentem).

## 3.3. Postawienie problemu

Sformułujemy teraz główne problemy, wokół których skupione są rozważania zawarte w tej pracy.
Dowiedzieliśmy się już, że istnieją miary, które nie mają naturalnego spektrum. Typowym pytaniem, jakie warto postawić jest: jak małe mogą być współczynniki Fouriera-Stieltjesa miary, dla której zachodzi fenomen Wienera-Pitta? Zwracamy uwagę, że jeśli miara ma po prostu współczynniki Fouriera-Stieltjesa szybko zbieżne do zera, to oczywiście jest absolutnie ciągła (powiedzmy, gdy ciąg jej współczynników Fouriera-Stieltjesa jest sumowalny z kwadratem, to

otrzymujemy w istocie funkcję z przestrzeni $L^2(\mathbb{T})$). Dlatego o tym problemie należy myśleć w szerszym kontekście, to znaczy w terminach zbioru współczynników Fouriera-Stieltjesa - w skrócie chodzi o to, że nawet bardzo małe współczynniki mogą powtarzać się nieskończenie wiele razy, co może doprowadzić do zjawisk takich, jak przy produkcie Riesza. Wprowadźmy definicję.

**Definicja 3.3.1.** *Zbiorem Wienera-Pitta nazywamy taki zbiór $A \subset \mathbb{C}$, że jeśli miara $\mu \in M(\mathbb{T})$ spełnia $\overline{F_\mu} \subset A$, to $\mu$ ma naturalne spektrum, czyli dla miary $\mu$ nie zachodzi fenomen Wienera-Pitta.*

Chodzi zatem o to, aby w terminach obiektów, które relatywnie łatwo kontrolować (współczynników Fouriera-Stieltjesa) móc podać kryteria gwarantujące naturalność spektrum. Zacznijmy od najprostszego przypadku - zbioru skończonego.

**Twierdzenie 3.3.2.** *Każdy zbiór skończony jest zbiorem Wienera-Pitta.*

*Dowód.* Niech $\mu \in M(\mathbb{T})$ będzie takie, że $F_\mu = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$. Rozważmy wielomian

$$f(z) = \prod_{k=1}^{m} (z - a_k).$$

Wielomiany działają na dowolnym elemencie algebry $M(\mathbb{T})$, więc istnieje miara $f(\mu) \in M(\mathbb{T})$ spełniająca

$$\varphi(f(\mu)) = f(\varphi(\mu)) \text{ dla każdego } \varphi \in \mathfrak{M}(M(\mathbb{T})).$$

Żeby nie było wątpliwości miara $f(\mu)$ jest określona wzorem

$$f(\mu) = \prod_{k=1}^{m} (\mu - a_k\delta).$$

Weźmy teraz dowolną liczbę naturalną $n \in \mathbb{Z}$. Z definicji wielomianu $f$ otrzymujemy

$$\widehat{f(\mu)}(n) = f(\widehat{\mu}(n)) = 0.$$

Zatem $f(\mu)$ jest miarą zerową. Spektrum miary jest obrazem jej transformaty Gelfanda, niech więc $\varphi$ będzie funkcjonałem liniowo-multiplikatywnym na algebrze $M(\mathbb{T})$. Wtedy $\varphi(f(\mu)) = 0$. Z drugiej strony,

$$\varphi(f(\mu)) = 1 \prod_{k=1}^{m} (\varphi(\mu) - a_k).$$

Zatem dla pewnego $\leqslant k \leqslant m$ zachodzi $\varphi(\mu) = a_k$, a stąd $\varphi(\mu) \in F_\mu$. Spektrum miary zawiera oczywiście wszystkie współczynniki Fouriera-Stieltjesa, więc

$$\sigma(\mu) = F_\mu,$$

co kończy dowód. □

Ten dowód może być nieco nieoczekiwany - w przypadku miar o skończonym zbiorze współczynników Fouriera-Stieltjesa narzuca się zastosowanie twierdzenia Helsona. Droga ta także doprowadzi do celu, lecz należy pokonać istotną trudność: taka miara może być sumą miary dyskretnej skupionej na zbiorze punktów o skończonych rzędach i wielomianu trygonometrycznego. Dla każdej z tych miar z osobna potrafimy wykazać naturalność spektrum, lecz nie wiemy tego (na razie) o ich sumie.
Pokrzepieni przykładem zbioru skończonego możemy postawić główny problem.

**Problem 1** (Problem Wienera-Pitta). *Czy istnieje nieskończony zbiór Wienera-Pitta?*

Zwróćmy uwagę, że możemy zakładać, iż w poszukiwaniach nieskończonego zbioru Wienera-Pitta ograniczamy się do zwartych podzbiorów płaszczyzny zespolonej. Problem Wienera-Pitta jest cały czas problemem otwartym, więc zadowolimy się na razie pewnym przeformułowaniem oraz wyciągnięciem wniosków z konstrukcji poprzedniego rozdziału.

**Wniosek 3.3.3.** *Zbiór* $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\} \cup \{1\}$ *nie jest zbiorem Wienera-Pitta.*

Przypomnijmy, że przykładem miary, dla której zachodzi fenomen Wienera-Pitta, o współczynnikach Fouriera-Stieltjesa pochodzących ze zbioru $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\} \cup \{1\}$ jest produkt Riesza.
Należy zastanowić się, jakiej formy odpowiedzi oczekujemy na problem Wienera-Pitta. Rozsądną hipoteza brzmiałaby następująco: jeśli zbiór przeliczalny jest odpowiednio "ciasny", to jest zbiorem Wienera-Pitta. Aby to pytanie sformalizować posłużymy się $\varepsilon$-sieciami ($\varepsilon$-sieć to z definicji suma kół otwartych pokrywająca dany zbiór o promieniach nie większych niż $\varepsilon$). Wygodnie będzie wprowadzić następującą definicję.

**Definicja 3.3.4.** *Niech $A \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem zwartym. Ustalmy $\varepsilon$. Funkcją sieci zbioru $A$ nazwiemy funkcję $\varepsilon \mapsto A(\varepsilon)$ określoną jako moc minimalnej $\varepsilon$-sieci zbioru $A$.*

Zauważmy, że dla zbioru skończonego $A$ spełniającego $\#A = n \in \mathbb{N}$ mamy $A(\varepsilon) \equiv n$. Jednak dla każdego nieskończonego zbioru zwartego $A$ dostajemy

$$\lim_{\varepsilon \to 0} A(\varepsilon) = \infty.$$

Jest jasne, że tempo wzrostu do $\infty$ funkcji sieci opisuje właśnie "ciasność" zbioru. Możemy teraz sformułować problem Wienera-Pitta w wersji ilościowej.

**Problem 2** (Problem Wienera-Pitta - wersja ilościowa). *Czy istnieje funkcja rzeczywista $f$ spełniająca*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(\varepsilon) = \infty,$$

*że jeśli dla zbioru zwartego $A \subset \mathbb{C}$ zachodzi*

$$A(\varepsilon) \leqslant f(\varepsilon),$$

*to $A$ jest zbiorem Wienera-Pitta.*

Rozważając przykład produktu Riesza można się bez trudu przekonać, iż funkcja typu $|\ln \varepsilon|$ nie rośnie do nieskończoności wystarczająco wolno.

**Komentarze i odniesienia do literatury.** Bardzo prosty dowód faktu, iż każdy zbiór skończony jest zbiorem Wienera-Pitta nie doczekał się do tej pory (według mojej najlepszej wiedzy) opisu w literaturze. Problemy postawione w tym podrozdziale stanowią siłę napędową do zajmowania się wieloma zagadnieniami pobocznymi. Mogę jednak zaryzykować stwierdzenie, że tak sformułowane pytania nie były do tej pory dostatecznie mocno stawiane, o czym świadczy ubogość informacji w dostępnych źródłach.

## 3.4. Algebra $M_0(\mathbb{T})$

Pytania postawione w poprzednim podrozdziale zdają się być bardzo trudne, dlatego warto rozważyć przypadek prostszy - miary, których ciąg współczynników Fouriera-Stieltjesa znika w nieskończoności.

**Definicja 3.4.1.** *Określamy zbiór*

$$M_0(\mathbb{T}) = \{\mu \in M(\mathbb{T}) : \lim_{|n|\to\infty} \widehat{\mu}(n) = 0\}$$

Zbiór $M_0(\mathbb{T})$ ma dobre własności algebraiczne, o których mówi poniższe stwierdzenie.

**Stwierdzenie 3.4.2.** *Zbiór $M_0(\mathbb{T})$ jest podalgebrą (bez jedynki) algebry $M(\mathbb{T})$ (a nawet ideałem). Ponadto zachodzą inkluzje*

$$L^1(\mathbb{T}) \subset M_0(\mathbb{T}) \subset M_c(\mathbb{T})$$

*Dowód.* Fakt, iż miary znikające w nieskończoności stanowią ideał jest oczywisty, więc nie będziemy się nad tym zatrzymywać. Dalej, inkluzja $L^1(\mathbb{T}) \subset M_0(\mathbb{T})$ jest konsekwencją lematu Riemanna-Lebesgue'a. Na koniec weźmy miarę $\mu \in M_0(\mathbb{T})$. Zgodnie z lematem Wienera (wniosek 2.5.3) mamy wykazać, że

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |\widehat{\mu}(n)|^2 = 0$$

Wynika to jednak łatwo stąd, że jeśli

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{\mu}(n) = 0, \text{ to } \lim_{n\to\infty} |\widehat{\mu}|^2 = 0$$

oraz znanego faktu z analizy, iż ciąg średnich arytmetycznych ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy (można także użyć twierdzenia Stolza). □

Warto się zastanowić, czy przypadkiem nie zachodzi równość $L^1(\mathbb{T}) = M_0(\mathbb{T})$, co prowadzi do sformułowania następującego pytania.

**Pytanie 5.** *Czy w algebrze $M_0(\mathbb{T})$ istnieją miary singularne?*

Okaże się niedługo, że tak, dlatego postawimy kolejne pytanie.

**Pytanie 6.** *Czy w algebrze $M_0(\mathbb{T})$ zachodzi fenomen Wienera-Pitta?*

Twierdzącą odpowiedź na to pytanie poznamy później. Wprowadzimy również pojęcie osłabionego problemu Wienera-Pitta.

**Problem 3** (Osłabiony problem Wienera-Pitta)**.** *. Czy istnieje zbiór nieskończony $A$ taki, że jeśli $F_\mu \subset A$ dla dowolnego $\mu \in M_0(\mathbb{T})$, to $\mu$ ma naturalne spektrum.*

Ostatni podrozdział tej pracy jest poświęcony dowodowi istnienia tego zbioru.
Na koniec tego podrozdziału uzasadnimy jeden prosty fakt (przypominamy, że spektrum w algebrze bez jedynki określamy jako spektrum w tej algebrze z dołączoną jedynką).

**Fakt 3.4.3.** *Niech $\mu \in M_0(\mathbb{T})$. Wówczas zachodzi równość*

$$\sigma_{M_0(\mathbb{T})}(\mu) = \sigma_{M(\mathbb{T})}(\mu).$$

*Dowód.* Inkluzja $\sigma_{M(\mathbb{T})}(\mu) \subset \sigma_{M_0}(\mathbb{T})(\mu)$ jest oczywista, aby więc wykazać inkluzję przeciwną weźmy $\lambda \notin \sigma_{M(\mathbb{T})}(\mu)$. Zatem istnieje miara $\nu \in M(\mathbb{T})$ taka, że

$$(\mu - \lambda\delta) * \nu = \delta. \tag{3.1}$$

Oczywiście $\lambda \neq 0$ (gdyż $\mu \in M_0(\mathbb{T})$). Zapiszmy miarę $\nu$ jako $\nu = (\nu + \frac{1}{\lambda}\delta) - \frac{1}{\lambda}\delta$. Wystarczy pokazać, że

$$\lim_{|n|\to\infty} \widehat{\nu}(n) = -\frac{1}{\lambda}.$$

Z równania 3.1 dostajemy dla każdego $n \in \mathbb{Z}$.

$$(\widehat{\mu}(n) - \lambda) \cdot \widehat{\nu}(n) = 1.$$

Korzystając z założenia $\mu \in M_0(\mathbb{T})$ otrzymujemy żądany wynik. □

**Komentarze i odniesienia do literatury.** Algebra $M_0(\mathbb{T})$ będzie pełniła ważną rolę w dalszej części pracy. Pierwsze przykłady miar singularnych, których współczynniki Fouriera-Stieltjesa zbiegają do zera, to pewne miary skupione na odpowiednio dobranych zbiorach Cantora. Szczegółowego ich omówienia tutaj nie przedstawiamy, gdyż w ogólności niewiele potrafię powiedzieć o ich spektrum. Dokładny opis zagadnień z nim związanych można znaleźć w książce [Zygmund].

## 3.5. Podejście operatorowe

Ten podrozdział służy zbadaniu podstawowych własności tak zwanych operatorów mnożnikowych. Zobaczymy potem, że do problemu naturalności spektrum miary można podejść z punktu widzenia takich operatorów, dzięki czemu uzyskamy bardzo ciekawe rezultaty.
Zaczniemy od najprostszego przypadku, czyli operatora polegającego na splocie z ustaloną funkcją. Wprowadźmy definicję.

**Definicja 3.5.1.** *Niech $f \in L^1(\mathbb{T})$ oraz $1 \leqslant p \leqslant \infty$, określamy operator mnożnikowy wzorem*

$$T_f(g) = f * g.$$

Zachodzi ważna nierówność.

**Fakt 3.5.2.** *Niech $\mu \in M(\mathbb{T})$ oraz $f \in L^p(\mathbb{T})$ dla $1 \leqslant p < \infty$. Wtedy zachodzi nierówność*

$$||\mu * f||_{L_p(\mathbb{T})} \leqslant ||\mu||_{M(\mathbb{T})}||f||_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Prostego dowodu tej nierówności opartego na dualności nie będziemy tutaj przedstawiać. Korzystając z własności jąder aproksymacyjnych dostajemy bez trudu.

**Fakt 3.5.3.** *Dla każdego $f \in L^1(\mathbb{T})$ operator $T_f$ jest dobrze określonym operatorem na przestrzeni $L^p(\mathbb{T})$, co więcej dla $1 \leqslant p < \infty$ oraz zachodzi $||T_f||_{B(L^p(\mathbb{T}))} = ||f||_{L^1(\mathbb{T})}$*

Bez trudu znajdziemy spektrum takiego operatora, o czym mówi poniższe stwierdzenie.

**Stwierdzenie 3.5.4.** *Niech $f \in L^1(\mathbb{T})$ oraz $1 \leqslant p < \infty$. Wtedy zachodzi równość*

$$\sigma(T_f) = \sigma_{L^1(\mathbb{T})\oplus\{\lambda\delta\}}(f) = \overline{\widehat{f}(\mathbb{Z})} = \widehat{f}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}.$$

*Dowód.* Równości $\sigma_{L^1(\mathbb{T})\oplus\{\lambda\delta\}}(f) = \overline{\widehat{f}(\mathbb{Z})} = \widehat{f}(\mathbb{Z})\cup\{0\}$ zostały wykazane wcześniej. Zacznijmy więc od wykazania inkluzji $\widehat{f}(\mathbb{Z}) \subset \sigma(T_f)$. Weźmy liczbę naturalną $n \in \mathbb{Z}$ i rozważmy liczbę $\widehat{f}(n) \in \widehat{f}(\mathbb{Z})$. Mamy wykazać, że operator $T_f - \widehat{f}(n)I$ nie jest odwracalny. Pokażemy więcej - ten operator nie jest różnowartościowy, czyli nawet $\widehat{f}(\mathbb{Z}) \subset \sigma_p(T_f)$. Istotnie, przyjmijmy $g = \chi^n$. Wtedy

$$T_f(g) = f * \chi^n - \widehat{f}(n)\chi^n.$$

Niech teraz $m \in \mathbb{Z}$. Dostajemy

$$\widehat{T_f(g)}(m) = 0.$$

Wynika to z faktu, że dla $m \neq n$ $\widehat{\chi^n}(m) = 0$, zaś dla $m = n$ mamy $\widehat{f * \chi^n}(n) = \widehat{f}(n)$. Zatem $T_f(g) \equiv 0$, czyli operator $T_f - \widehat{f}(n)I$ ma niezerowe jądro. Dalej, zauważmy, że $\sigma(T)$ jest domkniętym podzbiorem płaszczyzny zespolonej, więc $\widehat{f}(\mathbb{Z}) \subset \sigma(T)$ implikuje $\overline{\widehat{f}(\mathbb{Z})} \subset \sigma(T)$ (0 nie musi być wartością własną tego operatora).
Wykażemy teraz, że $\sigma(T) \subset \widehat{f}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}$. Weźmy więc $z \notin \widehat{f}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}$. Wtedy element $f - z\delta$ jest odwracalny w algebrze $L^1(\mathbb{T}) \oplus \{\lambda\delta\}$, czyli istnieje $h \in L^1(\mathbb{T}) \oplus \{\lambda\delta\}$ takie, że

$$(f - z\delta) * h = \delta.$$

Rozważmy teraz operator $T_h(g) = h * g$, dla $g \in L^p(\mathbb{T})$. Pomimo faktu, iż element $h$ w ogólności jest miarą, a nie funkcją, to biorąc splot z funkcją z $L^p(\mathbb{T})$ otrzymamy z powrotem funkcję z $L^p(\mathbb{T})$, a więc $T_h \in B(L^p(\mathbb{T}))$. Teraz

$$(T_h \circ (T_f - zI))(g) = T_h(f * g - zg) = (f * g - zg) * h = g$$
$$((T_f - zI) \circ T_h)(g) = (T_f - zI)(h * g) = h * g * f - z(h * g) = (h * g) * (f - z\delta) = g$$

Zatem operator $T_f - zI$ jest odwracalny, czyli $z \notin \sigma(T_f)$, co kończy dowód. □

Przejdziemy teraz do przypadku bardziej skomplikowanego, to znaczy ogólnych operatorów przemiennych z przesunięciami. Potrzebujemy kolejnych definicji.

**Definicja 3.5.5.** *Niech $\tau \in \mathbb{T}$. Dla dowolnej funkcji $f \in L^1(\mathbb{T})$ określamy jej przesunięcie wzorem $f_\tau(t) = f(t-\tau)$. Powiemy, że operator $T \in B(L^p(\mathbb{T}))$ dla $1 \leqslant p < \infty$ jest przemienny z przesunięciami, gdy dla każdego $\tau \in \mathbb{T}$ i $f \in L^p(\mathbb{T}))$ zachodzi*

$$(T(f))_\tau = T(f_\tau).$$

*Zbiór tych operatorów $T \in B(L^p(\mathbb{T}))$, które są przemienne z przesunięciami będziemy oznaczać $M_p$.*

Zachodzi następujący prosty fakt.

**Fakt 3.5.6.** *Dla każdego $p$ ($1 \leqslant p < \infty$) $M_p$ jest domkniętą podalgebrą (z jedynką) algebry $B(L^p(\mathbb{T}))$.*

*Dowód.* $M_p$ jest oczywiście podprzestrzenią liniową $B(L^p(\mathbb{T}))$. Łatwo też sprawdzić, że złożenie dwóch operatorów z $M_p$ jest ponownie operatorem z $M_p$. Sprawdzimy domkniętość, niech $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem operatorów z $M_p$ takim, że $||T_n - T||_{B(L^p(\mathbb{T}))} \to 0$ przy $n \to \infty$ dla pewnego $T \in B(L^p(\mathbb{T}))$. Teraz weźmy $f \in L^p(\mathbb{T})$ oraz $\tau \in \mathbb{T}$. Ze zbieżności operatorów w normie wynika zbieżność punktowa, a zatem

$$\lim_{n\to\infty} ||T_n(f_\tau) - T(f_\tau)||_{L^p(\mathbb{T})} = 0$$

Korzystając z przemienności z przesunięciami operatorów $T_n$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} ||(T_n(f))_\tau - T(f_\tau)||_{L^p(\mathbb{T})} = 0$$

teraz norma funkcji przesuniętej jest równa normie funkcji wyjściowej, więc otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} ||(T_n(f))_\tau - (T(f))_\tau||_{L^p(\mathbb{T})} = 0$$

Granica jest wyznaczona jednoznacznie, czyli $(T(f))_\tau = T(f_\tau)$, co kończy dowód. $\square$

Zauważamy z łatwością, że operatory $T_f$ są przemienne z przesunięciami, więc warto się zastanowić, czy istnieją inne. Przeczącą odpowiedź na to pytanie zawiera następujące twierdzenie

**Twierdzenie 3.5.7.** *Niech $T \in M_p$ dla $1 \leqslant p < \infty$. Wtedy operator $T$ jest mnożnikowy, to znaczy istnieje ciąg $(\widehat{T}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z})$ taki, że*

$$\widehat{Tf}(n) = \widehat{T}(n)\widehat{f}(n) \text{ dla każdego } n \in \mathbb{Z} \text{ oraz } f \in L^p(\mathbb{T}).$$

*Ciąg $(\widehat{T}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ będziemy nazywać transformatą operatora $T$.*

*Dowód.* Znajdźmy najpierw kandydata na ciąg $(\widehat{T}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$. W tym celu weźmy za $f = \chi^n$ dla kolejnych liczb naturalnych. Otrzymamy w ten sposób

$$\widehat{T}(n) = \widehat{T\chi^n}(n) \text{ dla każdego } n \in \mathbb{Z}.$$

Przekonajmy się, że jest to ciąg ograniczony, rzeczywiście

$$|\widehat{T\chi^n}(n)| \leqslant ||T\chi^n||_{L^1(\mathbb{T})} \leqslant ||T\chi^n||_{L^p(\mathbb{T})} \leqslant ||T||_{B(L^p(\mathbb{T})}.$$

Musimy zatem wykazać, że dla każdego $f \in L^p(\mathbb{T})$ oraz $n \in \mathbb{Z}$ zachodzi równość

$$\widehat{Tf}(n) = \widehat{T\chi^n}(n)\widehat{f}(n). \tag{3.2}$$

Ustalmy $n \in \mathbb{Z}$ i wykażmy powyższą równość dla charakterów, czyli weźmy $f = \chi^m$ dla pewnego $m \neq n$ (równość dla $m = n$ jest w trywialny sposób prawdziwa). Korzystające ze znanych wzorów otrzymujemy

$$\widehat{(T\chi^m)_\tau}(n) = \widehat{T\chi^m}(n)e^{-in\tau} \text{ dla } \tau \in \mathbb{T}.$$

Z drugiej strony korzystając z przemienności z przesunięciami mamy

$$\widehat{(T\chi^m)_\tau}(n) = \widehat{T\chi^m_\tau}(n) = \widehat{e^{-im\tau}T\chi^m}(n) = e^{-im\tau}\widehat{T\chi^m}(n).$$

Zatem dla każdego $\tau \in \mathbb{T}$ zachodzi

$$\widehat{T\chi^m}(n)e^{-in\tau} = e^{-im\tau}\widehat{T\chi^m}(n).$$

Założenie $m \neq n$ prowadzi do wniosku $\widehat{T\chi^m}(n) = 0$, który pokazuje, że równość 3.2 jest prawdziwa dla charakterów. Z liniowości obu stron dostajemy, że jest ona prawdziwa dla wszystkich wielomianów trygonometrycznych. Niech teraz $f \in L^p(\mathbb{T})$ i wybierzmy ciąg wielomianów trygonometrycznych taki $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$, że

$$\lim_{k\to\infty} ||f - P_k||_{L^p(\mathbb{T})} = 0$$

Z ciągłości operatora $T$ dostajemy

$$\lim_{k\to\infty} ||Tf - TP_k||_{L^p(\mathbb{T})} = 0.$$

Pamiętamy jednak, że zbieżność w normie implikuje zbieżność współczynników Fouriera, więc wystarczy teraz w równości

$$\widehat{TP_k}(n) = \widehat{\chi^n}(n)\widehat{P_k}(n)$$

przejść stronami do granicy przy $k \to \infty$, aby dostać równość 3.2 dla wszystkich $f \in L^p(\mathbb{T})$.
□

Zwróćmy uwagę, że prawdziwa jest także implikacja odwrotna, to znaczy zachodzi następujący fakt.

**Fakt 3.5.8.** *Niech $T \in B(L^p(\mathbb{T}))$ będzie operatorem mnożnikowym. Wtedy $T$ jest przemienny z przesunięciami.*

*Dowód.* Weźmy $f \in L^p(\mathbb{T})$, $\tau \in \mathbb{T}$ oraz $n \in \mathbb{Z}$ i zajmijmy się wykazaniem równości

$$\widehat{(Tf)_\tau}(n) = \widehat{Tf_\tau}(n).$$

Liczymy

$$\begin{aligned} \widehat{(Tf)_\tau}(n) &= \widehat{Tf}(n)e^{-in\tau} = \widehat{T}(n)\widehat{f}(n)e^{-in\tau}, \\ \widehat{Tf_\tau}(n) &= \widehat{T}(n)\widehat{f_\tau}(n) = \widehat{T}(n)\widehat{f}(n)e^{-in\tau}. \end{aligned}$$

Funkcja jest wyznaczona jednoznacznie przez swoje współczynniki Fouriera, co kończy dowód.
□

Ze względu na równoważność pojęć operatora mnożnikowego i operatora przemiennego z przesunięciami będziemy tych pojęć używać zamiennie. Podamy teraz uwagę (niektórzy autorzy występująca w niej własność przyjmują za definicję operatora mnożnikowego).

**Uwaga 3.5.9.** *Niech $T \in M_1\mathbb{T})$. Wtedy dla każdych $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ zachodzi*

$$T(f * g) = (Tf) * g.$$

Prostego dowodu polegającego na pokazaniu, że funkcje występujące po obu stronach równania mają te same współczynniki Fouriera nie będziemy przedstawiać.
Na początku tego podrozdziału rozważaliśmy operatory polegające na splocie z ustaloną funkcją, warto więc rozważyć sploty z miarą. Weźmy zatem $\mu \in M(\mathbb{T})$ i rozważmy operator $T_\mu(f) = \mu * f$. Jest to dobrze określony operator mnożnikowy oraz $T_\mu \in B(L^p(\mathbb{T}))$. Udowodnimy teraz podstawowe twierdzenie dotyczące takich operatorów. Potrzebujemy jednak najpierw technicznego lematu.

**Lemat 3.5.10.** *Niech $\mu \in M(\mathbb{T})$. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} ||\mu * K_n||_{M(\mathbb{T})} = ||\mu||_{M(\mathbb{T})},$$

*gdzie $K_n$ jest jądrem Fejera.*

*Dowód.* Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $f \in C(\mathbb{T})$, $||f||_{C(\mathbb{T})} = 1$ takie, że $< \mu, f >\geqslant ||\mu||_{M(\mathbb{T})} - \frac{\varepsilon}{2}$. Po pierwsze, zachodzi nierówność $||\mu * K_n||_{M(\mathbb{T})} \leqslant ||\mu||_{M(\mathbb{T})} \cdot ||K_n||_{L^1(\mathbb{T})} = ||\mu||_{M(\mathbb{T})}$. Dalej, z własności jąder aproksymacyjnych uzyskujemy

$$\lim_{n\to\infty} ||f * K_n - f||_{C(\mathbb{T})} = 0.$$

Z drugiej strony, zauważmy, że zachodzi równość $< \mu * K_n, f >=< \mu, f * K_n >$ (jej prawdziwość wynika z łączności splotu). Stąd

$$\lim_{n\to\infty} < \mu * K_n, f >= \lim_{n\to\infty} < \mu, f * K_n >=< \mu, f > .$$

W szczególności definicja normy miary jako funkcjonału na $C(\mathbb{T})$ implikuje, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n > N$ dostajemy

$$||\mu * K_n||_{M(\mathbb{T})} \geqslant< \mu, f > .$$

Łącząc te wyniki otrzymujemy

$$0 \leqslant ||\mu||_{M(\mathbb{T})} - ||\mu * K_n||_{M(\mathbb{T})} \leqslant< \mu, f > +\varepsilon- < \mu, f >= \varepsilon,$$

dla $n > N$, co kończy dowód. $\square$

**Twierdzenie 3.5.11.** *Niech $T \in M_1\mathbb{T})$. Wtedy istnieje dokładnie jedna miara $\mu \in M(\mathbb{T})$ taka, że $T = T_\mu$. Co więcej odwzorowanie $\mu \mapsto T_\mu$ jest izometrycznym izomorfizmem algebry $M(\mathbb{T})$ na algebrę $M_1$.*

*Dowód.* Wiemy, że operator $T$ jest mnożnikowy - należy więc wykazać, że jego transformata jest ciągiem Fouriera-Stieltjesa pewnej miary. Aby ten cel osiągnąć potrzebne Nam będzie jądro aproksymatywne o współczynnikach Fouriera równych 1 na coraz dłuższych zbiorach. Takim jądrem jest na przykład jądro de la Vallee Poussina, którego własności $\widehat{V_m}(n) = 1$ dla $n \leqslant m + 1$ oraz $||V_m||_{L^1(\mathbb{T})} < C$, dla pewnej stałej $C > 0$ będą kluczowe dla dowodu. Rozważmy ciąg $(T(V_m))_{m\in\mathbb{N}}$. Mamy

$$||T(V_m)||_{L^1(\mathbb{T})} \leqslant ||T||_{B(L^1(\mathbb{T}))} ||V_m||_{L^1(\mathbb{T})} \leqslant C||T||_{B(L^1(\mathbb{T}))}.$$

Jest to więc ciąg ograniczony, więc tratując funkcje $T(V_m)$ jako miary możemy wybrać podciąg słabo* zbieżny $(T(V_{m_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ do miary $\mu \in M(\mathbb{T})$. Musimy teraz pokazać, że w istocie $T = T_\mu$. W tym celu wystarczy udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\widehat{T}(n) = \widehat{\mu}(n).$$

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Słaba* zbieżność miar implikuje zbieżność współczynników Fouriera-Stieltjesa, więc

$$\lim_{k\to} \widehat{T}(n)\widehat{V_{m_k}}(n) = \widehat{\mu}(n).$$

Dla dostatecznie dużych $k$ (wystarczy $k \geqslant n$) mamy jednak $\widehat{V_{m_k}}(n) = 1$, a więc jest to ciąg stały od pewnego miejsca, co dowodzi, że $\widehat{T}(n) = \widehat{\mu}(n)$.
Sprawdzimy teraz własności odwzorowania $N : M(\mathbb{T}) \mapsto M_1$ określonego wzorem $N(\mu) = T_\mu$. Widać od razu, że jest to przekształcenie liniowe. Fakt, iż $N$ zachowuje mnożenie również nie budzi wątpliwości - niech $\mu, \lambda \in M(\mathbb{T})$, wtedy

$$N(\mu * \lambda) = T_{\mu*\lambda} = T_\mu \circ T_\lambda = N(\mu) \circ T(\lambda).$$

Z dowodu poprzedniej części twierdzenia wynika także, że jest to odwzorowanie "na". Aby udowodnić różnowartościowość załóżmy, że $T_\mu \equiv 0$ (0 oznacza tutaj operator zerowy). Wtedy $T_\mu(f) = \mu * f = 0$ dla każdego $f \in L^p(\mathbb{T})$. Zatem dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ zachodzi $\widehat{\mu}(n)\widehat{f}(n) = 0$. Biorąc teraz kolejno $f = \chi^n$ dla $n \in \mathbb{Z}$ otrzymamy $\widehat{\mu}(n) = 0$. Miara jest wyznaczona przez swoje współczynniki Fouriera-Stieltjesa, więc $\mu \equiv 0$, a więc operator $N$ jest różnowartościowy. Należy pokazać jeszcze, że $||T_\mu||_{B(L^1(\mathbb{T}))} = ||\mu||_{M(\mathbb{T})}$. Mamy

$$||T_\mu(f)||_{L^1(\mathbb{T})} = ||\mu * f||_{L^1(\mathbb{T})} \leqslant ||\mu||_{M(\mathbb{T})}||f||_{L^1(\mathbb{T})}.$$

Stąd $||T_\mu||_{B(L^1(\mathbb{T}))} \leqslant ||\mu||_{M(\mathbb{T})}$. Aby wykazać, że ostatnia nierówność jest w istocie równością skorzystamy z lematu poprzedzającego twierdzenie. Pamiętając, że $||K_n||_{L^1(\mathbb{T})} = 1$ mamy

$$||T_\mu(K_n)||_{L^1(\mathbb{T})} = ||\mu * K_n||_{M(\mathbb{T})} \to ||\mu||_{M(\mathbb{T})} \text{ przy } n \to \infty.$$

W ten sposób znaleźliśmy ciąg wybijający normę, co kończy dowód równości $||T_\mu(K_n)||_{B(L^1(\mathbb{T}))} = ||\mu||_{M(\mathbb{T})}$ i w konsekwencji całego twierdzenia. □

Pełne wykorzystanie tego rezultatu będzie wymagało pewnej obserwacji - spektrum operatora jest takie same, bez względu na to, czy rozpatrujemy go jako element całej algebry $B(L^p(\mathbb{T}))$, czy mniejszej algebry $M_p$. Najbardziej użyteczne w dalszej części pracy będą dla nas operatory, których transformaty znikają w $\infty$. Wprowadźmy definicję.

**Definicja 3.5.12.** *Dla $1 \leqslant p < \infty$ wprowadzamy przestrzeń*

$$C_0M_p = \{T \in M_p : \lim_{|n|\to\infty} \widehat{T}(n) = 0\}.$$

Następujący fakt wynika wprost z definicji.

**Fakt 3.5.13.** *Zbiór $C_0M_p$ dla $1 \leqslant p < \infty$ jest domkniętą podalgebrą bez jedynki (nawet ideałem) algebry $M_p$.*

Z poprzednich wyników otrzymujemy również.

**Fakt 3.5.14.** *Algebra $M_0(\mathbb{T})$ jest izometrycznie izomorficzna z algebrą $C_0M_1$.*

Możemy teraz sformułować bardzo użyteczne stwierdzenie.

**Stwierdzenie 3.5.15.** *Niech $T \in M_p$ dla pewnego $1 \leqslant p < \infty$. Wtedy*

$$\sigma_{B(L^p(\mathbb{T}))}(T) = \sigma_{M_p}(T).$$

*Podobnie, gdy $T \in C_0M_p$ zachodzi*

$$\sigma_{B(L^p(\mathbb{T}))}(T) = \sigma_{C_0M_p}(T).$$

*Dowód.* Spektrum w większej algebrze jest nie większe niż spektrum w mniejszej algebrze, więc otrzymujemy inkluzje

$$\sigma_{B(L^p(\mathbb{T}))}(T) \subset \sigma_{M_p}(T) \text{ dla } T \in M_p,$$
$$\sigma_{B(L^p(\mathbb{T}))}(T) \subset \sigma_{C_0M_p}(T) \text{ dla } T \in C_0M_p.$$

Weźmy teraz $\lambda \notin \sigma_{B(L^p(\mathbb{T}))}(T)$. Wtedy operator $T - \lambda I$ jest odwracalny, więc istnieje $S \in B(L^p(\mathbb{T}))$ takie, że $(T - \lambda I)S = S(T - \lambda I) = I$. Pokażemy, że operator $S$ jest przemienny z przesunięciami. Dla prostoty przyjmijmy oznaczenie $U = T - \lambda I$, oczywiście $U \in M_p$ Niech

$\tau \in \mathbb{T}$ oraz $g \in L^p(\mathbb{T})$. Mamy $g_\tau = US(g_\tau) = SU(g_\tau) = S((Ug)_\tau)$. Dalej, zauważmy, że również $(SU(g))_\tau = g_\tau$, więc $S((Ug)_\tau) = (S(U(g)))_\tau$. Operator $U$ jest odwracalny, czyli dla każdego $f \in L^p(\mathbb{T})$ istnieje $g \in L^p(\mathbb{T})$ takie, że $Ug = f$. Zatem równość $S(f_\tau) = (Sf)_\tau$ zachodzi dla każdego $f \in L^p(\mathbb{T})$, stąd $S \in M_p$ i ostatecznie $\lambda \notin \sigma_{M_p}(T)$, co prowadzi do wniosku $\sigma_{B(L^p(\mathbb{T}))}(T) \subset \sigma_{M_p}(T)$. Aby wykazać drugą część musimy do algebry $C_0M_p$ dołączyć operator identycznościowy. Rozumując jak poprzednio dla $T \in C_0M_p$ oraz $\lambda \notin \sigma_{B(L^p(\mathbb{T}))}(T)$ ($\lambda \neq 0$, bo 0 zawsze jest w spektrum dla takiego operatora $T$) uzyskujemy istnienie operatora odwrotnego $S \in M_p$. Musimy wykazać, że $S = V + aI$ dla pewnego $V \in C_0M_p$ oraz liczby zespolonej $a \in \mathbb{C}$. Rozpatrzmy w tym celu operator $V$ określony wzorem $V = S + \frac{1}{\lambda}I$. Wtedy $\widehat{V}(n) = \widehat{S}(n) + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\widehat{T}(n)-\lambda} + \frac{1}{\lambda}$ ostatnia równość wynika z faktu, iż $S$ jest operatorem odwrotnym do $T - \lambda I$ oraz stąd, że transformata złożenia operatorów jest iloczynem transformat, co sprawdzamy wprost z definicji. Skoro $T \in C_0M_p$, to i $V \in C_0M_p$. Na koniec wystarczy przyjąć $S = V - \frac{1}{\lambda}I$. □

W ten sposób otrzymujemy kluczowe dla Nas twierdzenie.

**Twierdzenie 3.5.16.** *Niech $\mu \in M(\mathbb{T})$, wtedy*

$$\sigma(T_\mu) = \sigma(\mu).$$

Pozwala ono sprowadzić badanie spektrum miary do badania spektrum operatora splotowego na $L^1(\mathbb{T})$. Na tej obserwacji będą się opierać wyniki zawarte w następnym podrozdziale. Na koniec, warto się zastanowić, jakie jest spektrum operatora splotowego na przestrzeniach $L^p(\mathbb{T})$ dla $1 < p < \infty$. Odnotujmy, że zachodzi następujące twierdzenie, którego nie będziemy dowodzić.

**Twierdzenie 3.5.17.** *Niech $\mu \in M_0(\mathbb{T})$ oraz $1 < p < \infty$. Wtedy zachodzi równość*

$$\sigma_{B(L^p(\mathbb{T}))}(T_\mu) = \widehat{\mu}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}.$$

**Komentarze i odniesienia do literatury.** Fakty przedstawione w tym podrozdziale stanowią podstawy teorii mnożnikowej, którą można zgłębić czytając książki [Larsen], [Hörmander] (w tej ostatniej można znaleźć dowód twierdzenia kończącego tę część pracy).

## 3.6. Praca Zafrana

Omówimy teraz wyniki Mischy Zafrana mające pierwszorzędne znaczenie dla naszych badań. Okaże się, że miary o naturalnym spektrum stanowią domknięty ideał w algebrze $M_0(\mathbb{T})$. Co więcej, rezultaty zawarte w tym podrozdziale pozwolą Nam sformułować potem warunki konieczne i dostateczne dla naturalności spektrum produktów Riesza.
Będziemy używać podejścia operatorowego. Zacznijmy od prostego lematu.

**Lemat 3.6.1.** *Niech $1 \leqslant p < \infty$ oraz $T \in M_p$. Wtedy*

$$\overline{\widehat{T}(\mathbb{Z})} \subset \sigma(T).$$

*Dowód.* Podobne argumenty już się pojawiały, lecz przedstawimy krótkie rozumowanie dla porządku. Ponieważ $\sigma(T)$ jest zwarte wystarczy wykazać, że $\widehat{T}(\mathbb{Z}) \subset \sigma(T)$. Weźmy więc liczbę $n \in \mathbb{Z}$ i odpowiadającą jej wartość $\widehat{T}(n)$. Zgodnie z definicją spektrum przyjrzyjmy się operatorowi $U = T - \widehat{T}(n)I$. Teraz $U(\chi^n) = T(\chi^n) - \widehat{T}(n)\chi^n$. Porównując współczynniki Fouriera obu stron uzyskujemy $\widehat{U(\chi^n)}(m) = \widehat{T}(m)\widehat{\chi^n}(m) - \widehat{T}(n)\widehat{\chi^n}(m) = 0$ (ostatnia równość wynika stąd, że $\widehat{\chi^n}(m) = 0$ dla $m \neq n$ oraz $\widehat{\chi^n}(n) = 1$). Zatem operator $U$ nie jest różnowartościowy, więc $\widehat{T}(n) \in \sigma(T)$, co kończy dowód. $\square$

W kolejnym lemacie zawiera się już o wiele głębsza treść.

**Lemat 3.6.2.** *Niech $1 \leqslant p < \infty$ i $T \in M_p$. Jeśli $\lambda$ jest punktem izolowanym $\sigma(T)$, to $\lambda \in \widehat{T}(\mathbb{Z})$. Co więcej, $\lambda$ jest biegunem prostym funkcji meromorficznej o wartościach w przestrzeni operatorów $R(z,T) = (T - zI)^{-1}$.*

*Dowód.* Dobierzmy $\varepsilon > 0$ tak, by koło $D = \{z : |z-\lambda| < \varepsilon\}$ spełniało warunek $\overline{D} \cap \sigma(T) = \{\lambda\}$. Rozwińmy funkcję $R(z,T)$ w szereg Laurenta wokół $\lambda$

$$R(z,T) = \sum_{n=\infty}^{\infty} A_n(z-\lambda)^n \text{ dla } |z-\lambda| < \varepsilon.$$

Jak wiemy współczynniki $A_n$ zadane są wzorami

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{R(z,T)}{(z-\lambda)^{n+1}} dz \text{ dla } n \in \mathbb{Z}$$

Weźmy teraz funkcję analityczną $f$ określoną na otoczeniu $\sigma(T)$ i taką, że $f \equiv 1$ na $\overline{D}$ oraz $f \equiv 0$ na $\sigma(T) \setminus \{\lambda\}$. Wtedy współczynniki $A_n$ dla $n \leqslant -1$ możemy wyrazić wzorem

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{f(z)}{(z-\lambda)^{n+1}} R(z,T) dz,$$

gdzie $C$ jest krzywą zamkniętą zawartą w dziedzinie $f$ otaczającą $\lambda$. Z twierdzenia o rachunku funkcyjnym widzimy jednak, że

$$A_n = f(T)(T-\lambda I)^{-n-1} \text{ dla } n \leqslant -1. \tag{3.3}$$

Oczywiście zarówno $A_n$ jak i $f(T)$ należą do $M_p$, a także (z definicji działania funkcją na element algebry Banacha)

$$\widehat{f(T)}(n) = f(\widehat{T}(n)) \text{ dla } n \in \mathbb{Z}. \tag{3.4}$$

Skoro $R(z,T)$ nie jest analityczna w otoczeniu $\lambda$, to istnieje $m \in \mathbb{N}$ $(m > 0)$, dla którego $A_{-m} = 0$. Z równania 3.3 mamy $f(T) \neq 0$. Zatem znajdziemy takie $n \in \mathbb{Z}$ (zobacz równanie 3.4), że

$$f(\widehat{T}(n)) \neq 0.$$

Ale $\widehat{T}(\mathbb{Z}) \subset \sigma(T)$, więc z powyższego warunku i definicji $f$ dostajemy $\widehat{T}(n) = \lambda$, co kończy dowód pierwszej części lematu.

Aby udowodnić drugą część załóżmy, że $\lambda$ nie jest biegunem prostym, czyli istnieje liczba naturalna $j \geqslant 2$, dla której $A_{-j} \neq 0$. Dobierzemy więc $m \in \mathbb{Z}$ takie, że $\widehat{A_{-j}}(m) \neq 0$. Z równań 3.3 i 3.4 dostajemy

$$0 \neq \widehat{A_{-j}}(m) = f(\widehat{T}(m))(\widehat{T}(m) - \lambda)^{j-1}.$$

Stąd $f(\widehat{T}(m)) \neq 0$, czyli $\widehat{T}(m) = \lambda$, co jest oczywistą sprzecznością z warunkiem $j \geqslant 2$ i otrzymaną przed chwilą równością. Kończy to dowód drugiej części lematu. $\square$

Następne twierdzenie nie będzie używane w dalszej części pracy, lecz podamy je, gdyż jest interesujące samo przez się.

**Twierdzenie 3.6.3.** *Niech* $1 \leqslant p < \infty$ *i* $T \in M_p$. *Jeśli* $\lambda$ *jest punktem izolowanym* $\sigma(T)$, *to* $\lambda \in \sigma_p(T)$.

*Dowód.* Z lematu 3.6.2 dostajemy, że $\lambda$ jest także punktem izolowanym $\overline{\widehat{T}(\mathbb{Z})}$. Możemy znaleźć zbiór skończony $A \subset \mathbb{Z}$ taki, że $\widehat{T}(A) = \{\lambda\}$. Niech teraz $f$ będzie wielomianem trygonometrycznym postaci

$$f(x) = \sum_{n \in A} e^{int}.$$

Zauważmy teraz, że przyjmując $U = T - \lambda I$ mamy $\widehat{U(f)}(n) = 0$ dla $n \in \mathbb{Z}$. Zatem $(T - \lambda I)(f) = 0$ oraz $f \neq 0$, czyli $\lambda \in \sigma_p(T)$, co kończy dowód. □

Zanim przejdziemy dalej uzasadnimy następujący prosty fakt.

**Fakt 3.6.4.** *Dla* $1 \leqslant p < \infty$ *oraz* $T \in M_p$ *zachodzi równość*

$$\widehat{T}(\mathbb{Z}) = \sigma_p(T).$$

*Dowód.* Inkluzja $\widehat{T}(\mathbb{Z}) \subset \sigma_p(T)$ została wykazana w lemacie 3.6.1. Aby wykazać zawieranie odwrotne weźmy $\lambda \in \sigma_p(T)$, wtedy istnieje $0 \neq f \in L^p(\mathbb{T})$ takie, że $Tf - \lambda f = 0$. Z warunku $f \neq 0$ wynika, iż istnieje $n \in \mathbb{Z}$ o własności $\widehat{f}(n) \neq 0$. Porównując $n$-te współczynniki Fouriera obu stron poprzedniej równości dostajemy

$$\widehat{T}(n)\widehat{f}(n) = \lambda \widehat{f}(n).$$

Ostatecznie $\widehat{T}(n) = \lambda$, więc $\lambda \in \widehat{T}(\mathbb{Z})$. □

Kolejny lemat pokaże, że w przypadku operatorów mnożnikowych nie musimy przejmować się spektrum residualnym.

**Lemat 3.6.5.** *Niech* $1 \leqslant p < \infty$ *i* $T \in M_p$. *Wtedy* $\sigma_r(T) = \emptyset$.

*Dowód.* Weźmy $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$. Pokażemy, że obraz $U := T - \lambda I$ zawiera wszystkie wielomiany trygonometryczne. $U(L^p(\mathbb{T}))$ jest oczywiście przestrzenią liniową, więc wystarczy wykazać, iż należą do niej charaktery. Ustalmy liczbę $n \in \mathbb{Z}$ i rozważmy funkcję $g = \frac{\chi^n}{\widehat{T}(n) - \lambda}$ (jest ona dobrze określona, bo $\lambda \notin \sigma_p(T) = \widehat{T}(\mathbb{Z})$ z faktu poprzedzającego lemat). Zachodzi równość

$$(T - \lambda I)(g) = \chi^n.$$

Rzeczywiście, obliczając $m$-ty ($m \neq n$) współczynnik Fouriera obu stron otrzymamy 0, zaś dla $m = n$ dostajemy

$$\widehat{g}(n)(\widehat{T}(n) - \lambda) = 1,$$

która to równość jest spełniona na mocy definicji $g$. Ostatecznie $U(L^p(\mathbb{T}))$ zawiera wszystkie wielomiany trygonometryczne, więc jest to jest to gęsty podzbiór przestrzeni $L^p(\mathbb{T})$, czyli $\lambda \in \sigma_c(T)$, co kończy dowód. □

Ostatni lemat wraz z faktem go poprzedzającym prowadzą do następującego wniosku.

**Wniosek 3.6.6.** *Niech* $1 \leqslant p < \infty$ *oraz* $T \in C_0M_p$. *Wtedy* $\sigma_c(T)$ *jest niepuste tylko, gdy* $\sigma(T) \neq \widehat{T}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}$.

Zauważmy teraz, że skoro $\mathbb{Z}$ jest przeliczalne, to dla $T \in C_0M_p$ zbiór $\widehat{T}(\mathbb{Z})$ jest oczywiście także przeliczalny. Następny lemat pokazuje, że jeśli spektrum ciągłe jest niepuste, to jest zbiorem większej mocy.

**Lemat 3.6.7.** *Niech $1 \leqslant p < \infty$ oraz $T \in C_0M_p$. Załóżmy, że $\sigma(T) \neq \widehat{T}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}$. Wtedy $\sigma_c(T) \setminus \{0\}$ jest niepustym zbiorem doskonałym. W szczególności, $\sigma_c(T) \setminus \{0\}$ jest nieprzeliczalne.*

*Dowód.* Z wniosku poprzedzającego lemat wiemy, że $\sigma_c(T) \setminus \{0\}$ jest niepuste, weźmy więc $z \in \sigma_c(T) \setminus \{0\}$. Spektrum punktowe jest rozłączne ze spektrum ciągłym oraz spektrum rezidualne jest puste, stąd $\sigma(T)$ jest sumą rozłączną zbiorów $\widehat{T}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}$ i $\sigma_c(T) \setminus \{0\}$, czyli $z \notin \widehat{T}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}$. Teraz, w oparciu o lemat 3.6.2 $z$ nie jest punktem izolowanym $\sigma(T)$, zatem istnieje ciąg różnych punktów $z_n \in \sigma(T)$ taki, że $z_n \to z$ przy $n \to \infty$. Skoro $\widehat{T}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}$ jest zwarte i $z \notin \widehat{T}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}$, to co najwyżej skończenie wiele $z_n$ należy do zbioru $\widehat{T}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}$, a więc możemy założyć, iż $z_n \in \sigma_c(T) \setminus \{0\}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. W ten sposób wykazaliśmy, że każdy punkt niepustego zbioru $\sigma_c(T) \setminus \{0\}$ jest punktem skupienia tegoż zbioru. Stąd $\sigma_c(T) \setminus \{0\}$ jest zbiorem doskonałym. Nieprzeliczalność zbioru $\sigma_c(T) \setminus \{0\}$ wynika teraz z faktu, iż $\sigma(T)$ jest sumą $\sigma_c(T) \setminus \{0\}$ i zbioru przeliczalnego $\widehat{T}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}$, co kończy dowód lematu. $\square$

Wykażemy teraz lemat mówiący, że zbiór operatorów o "dobrym" spektrum jest zamknięty na dodawanie.

**Lemat 3.6.8.** *Niech $1 \leqslant p < \infty$ oraz $T, S \in C_0M_p$. Załóżmy, że $\sigma(T) = \widehat{T}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}$ oraz $\sigma(S) = \widehat{S}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}$. Wtedy $\sigma(S+T) = (\widehat{S+T})(\mathbb{Z}) \cup \{0\}$.*

*Dowód.* Przypominamy, że $\sigma_{B(L^p(\mathbb{T}))}(S+T) = \sigma_{C_0M_p}(S+T)$. Spektrum operatora jest obrazem jego transformaty Gelfanda, więc

$$\begin{aligned}
&\sigma(S+T) = \{h(S+T) : h \in \mathfrak{M}(C_0M_p)\} \cup \{0\} \\
&\subset [\{h(S) : h \in \mathfrak{M}(C_0M_p)\} \cup \{0\}] + [\{h(T) : h \in \mathfrak{M}(C_0M_p)\} \cup \{0\}] \\
&= \sigma(S) + \sigma(T)
\end{aligned}$$

Z założenia jednak oba zbiory $\sigma(T)$ i $\sigma(S)$ są przeliczalne. Z wykazanego właśnie zawierania uzyskujemy, że $\sigma(S+T)$ także jest przeliczalne, co w połączeniu z lematem 3.6.7 kończy dowód. $\square$

Będzie Nam potrzebna dalej wiedza dotycząca relacji pomiędzy zbiorem najprostszych operatorów mnożnikowych, czyli splotów z ustaloną funkcją całkowalną, a całą algebrą $C_0M_p$. W tym celu udowodnimy następujący lemat.

**Lemat 3.6.9.** *Niech $1 \leqslant p < \infty$. Oznaczmy przez $m_p$ domknięcie zbioru*

$$\{T_f : f \in L^1(\mathbb{T})\}$$

*w normie przestrzenie operatorów $B(L^p(\mathbb{T}))$. Niech $\mathfrak{J}$ będzie dowolną domkniętą podalgebrą $C_0M_p$ zawierającą $m_p$. Załóżmy, że $h \in \mathfrak{M}(\mathfrak{J}) \setminus \mathbb{Z}$. Wtedy $h(T) = 0$ dla wszystkich $T \in m_p$.*

*Dowód.* Załóżmy przeciwnie, to znaczy $h(T) \neq 0$. Wtedy $h \in \mathfrak{M}(m_p)$. Z drugiej strony wykazaliśmy wcześniej, że $\mathfrak{M}(m_p) = \mathbb{Z}$. Zatem istnieje $n \in \mathbb{Z}$ takie, że

$$h(U) = \widehat{U}(n) \text{ dla wszystkich } U \in m_p.$$

Pokażemy, że ta równość jest prawdziwa dla wszystkich $U \in \mathfrak{J}$. Niech $f$ będzie wielomianem trygonometrycznym spełniającym $\widehat{f}(n) = 1$. Wtedy dla każdego $U \in \mathfrak{J}$ dostajemy

$$h(U) = h(U)\widehat{f}(n) = h(U)h(T_f) = h(U \circ T_f) = \widehat{U \circ T_f}(n) = \widehat{U}(n).$$

Z założenia jednak $h \in \mathfrak{M}(\mathfrak{J}) \setminus \mathbb{Z}$, co jest sprzecznością kończącą dowód. $\square$

Powstaje jednak pytanie, jak dużą częścią całej algebry $C_0M_p$ jest zbiór $m_p$. Okazuje się, że jest on istotnie mniejszy od zbioru operatorów mnożnikowych, które mają naturalne spektrum. Mówi o tym poniższe twierdzenie, którego nie będziemy tutaj dowodzić, gdyż wymaga wielu dodatkowych przygotowań.

**Twierdzenie 3.6.10.** *Niech $1 \leqslant p < \infty$, $(p \neq 2)$. Wtedy $m_p$ jest właściwym podzbiorem zbioru*

$$\mathscr{C} = \{T \in C_0M_p : \sigma_T = \widehat{T}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}\}.$$

Przechodzimy teraz do głównego twierdzenia z pracy Mischy Zafrana.

**Twierdzenie 3.6.11.** *Niech $1 \leqslant p < \infty$. Określmy zbiór*

$$\mathscr{C} = \{T \in C_0M_p : \sigma(T) = \widehat{T}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}\}.$$

*Wtedy*

- *Jeśli $h \in \mathfrak{M}(C_0M_p) \setminus \mathbb{Z}$, to $h(T) = 0$ dla wszystkich $T \in \mathscr{C}$.*
- *$\mathscr{C}$ jest domkniętym ideałem w $C_0M_p$.*
- *$\mathfrak{M}(\mathscr{C}) = \mathbb{Z}$.*

*Dowód.* Zaczniemy od dowodu części 1. Niech $T \in \mathscr{C}$ oraz $h \in \mathfrak{M}(C_0M_p) \setminus \mathbb{Z}$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $N \in \mathbb{N}$ takie, że $|\widehat{T}(n)| < \varepsilon$ dla $n > |N|$. Weźmy wielomian trygonometryczny $f$ określony wzorem

$$f(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}.$$

Wtedy $\widehat{f}(n) = 1$ dla $n \in \{-N, -N+1, \ldots, N-1, N\}$ oraz $\widehat{f}(\mathbb{Z}) = \{0, 1\}$. Określmy $T_1 = T \circ T_f$ oraz $T_2 = T - T \circ T_f$. Wtedy oczywiście $T = T_1 + T_2$. Z lematu 3.6.9 mamy

$$\varphi(T_1) = 0 \text{ dla wszystkich } \varphi \in \mathfrak{M}(C_0M_p) \setminus \mathbb{Z}.$$

W szczególności, $\sigma(T_1) = \widehat{T_1}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}$. Z lematu 3.6.8 otrzymujemy także (zbiór operatorów o naturalnym spektrum jest zamknięty na dodawanie) $\sigma(T_2) = \widehat{T_2}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}$. Pokażemy teraz, że $|h(T_2)| < \varepsilon$. Spektrum jest obrazem transformaty Gelfanda elementu, więc $h(T_2) \in \sigma(T_2) = \widehat{T_2} \cup \{0\}$. Jeśli $h(T_2) = 0$, to nie ma czego dowodzić. W przeciwnym wypadku istnieje $n \in \mathbb{Z}$ takie, że $h(T_2) = \widehat{T_2}(n)$. Jeśli $|n| \leqslant N$, to definicja $T_2$ implikuje, że $\widehat{T_2}(n) = 0$. Przy założeniu $|n| > N$ mamy

$$|h(T_2)| = |\widehat{T_2}(n)| = |\widehat{T}(n)(1 - \widehat{f}(n))| < \varepsilon.$$

Zatem korzystając z liniowości dostajemy

$$|h(T)| = |h(T_1 + T_2)| = |h(T_2)| < \varepsilon.$$

Dzięki dowolności $\varepsilon > 0$ dowód części 1 jest zakończony.
Punkt 2 wynika teraz stąd, że

$$\mathscr{C} = \bigcap_{h \in \mathfrak{M}(C_0M_p) \setminus \mathbb{Z}} \ker h.$$

Udowodnimy teraz część 3. Wykażemy najpierw równość

$$\sigma_{\mathscr{C}}(T) = \sigma(T).$$

Weźmy $T \in \mathscr{C}$ oraz $\lambda \notin \sigma(T)$. Wtedy istnieje $S \in C_0M_p \oplus \{aI\}$ takie, że $S = (T - \lambda I)^{-1}$. Podobnie jak wcześniej mamy też

$$\lim_{|n|\to\infty} \widehat{S}(n) = -\frac{1}{\lambda}.$$

Przyjmijmy oznaczenie $g(x) = \frac{1}{x-\lambda}$. Zgodnie z naszymi wynikami funkcja $g$ działa na $T$ oraz $g(T) = S$. Z definicji działania uzyskujemy

$$\varphi((S + \frac{1}{\lambda}I)) = \varphi(g(T) + \frac{1}{\lambda}I) = g(\varphi(T)) + \frac{1}{\lambda} \text{ dla każdego } \varphi \in \mathfrak{M}(C_0M_p \oplus \{aI\}).$$

Teraz $g(\varphi(T)) = g(\widehat{T}(\mathbb{Z} \cup \{0\})) = \widehat{S}(\mathbb{Z}) \cup \{-\frac{1}{\lambda}\}$. Dalej,

$$(\widehat{S}(\mathbb{Z}) \cup \{-\frac{1}{\lambda}\}) + \{\frac{1}{\lambda}\} = (\widehat{S}(\mathbb{Z}) + \frac{1}{\lambda}) \cup \{0\} = (\widehat{S + \frac{1}{\lambda}I})(\mathbb{Z}) \cup \{0\}.$$

Zatem $(S + \frac{1}{\lambda}I) \in \mathscr{C}$, czyli $S \in \mathscr{C} \oplus \{aI\}$, a więc $\lambda \notin \sigma_{\mathscr{C}}(T)$. W ten sposób pokazaliśmy, że

$$\sigma_{\mathscr{C}}(T) \subset \sigma(T).$$

Odwrotna inkluzja jest trywialna (spektrum w większej algebrze jest nie większe niż spektrum w mniejszej algebrze), stąd ostatecznie $\sigma_{\mathscr{C}}(T) = \sigma(T)$.
Aby zakończyć dowód punktu 3, załóżmy, że istnieje $h \in \mathfrak{M}(\mathscr{C}) \setminus \mathbb{Z}$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ oraz wybierzmy $T \in \mathscr{C}$ spełniające $h(T) \neq 0$. Rozłóżmy operator $T$ na sumę operatorów $T_1$ i $T_2$ jak w części 1. Jak poprzednio dostajemy $T_1, T_2 \in \mathscr{C}$. Z lematu 3.6.9 dostajemy $h(T_1) = 0$. Ze względu na równanie 3.6 mamy $h(T_2) \in \sigma(T_2)$, czyli istnieje $n \in \mathbb{Z}$ o własności $h(T_2) = \widehat{T_2}(n)$. Używając takich argumentów jak w dowodzie części 1 otrzymujemy $|h(T)| < \varepsilon$. Z dowolności $\varepsilon > 0$ mamy $h(T)$, co prowadzi do wniosku $h \equiv 0$ i kończy dowód części 3 oraz całego twierdzenia. $\square$

Rozpatrując przypadek $p = 1$ i przypominając sobie izometryczny izomorfizm $M_0(\mathbb{T}) \cong C_0M_1$ uzyskujemy następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 3.6.12.** *Przyjmując oznaczenie*

$$\mathscr{C} = \{\mu \in M_0(\mathbb{T}) : \sigma(T) = \widehat{\mu}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}\},$$

*zachodzą następujące fakty*

1. *Jeśli $h \in \mathfrak{M}(M_0(\mathbb{T})) \setminus \mathbb{Z}$, to $h(\mu) = 0$ dla wszystkich $\mu \in \mathscr{C}$.*
2. *$\mathscr{C}$ jest domkniętym ideałem w $M_0(\mathbb{T})$.*
3. *$\mathfrak{M}(\mathscr{C}) = \mathbb{Z}$.*

Te rezultaty nie mogą być w istotny sposób wzmocnione. W szczególności, powyższe twierdzenie przestaje być prawdziwe bez założenia o znikaniu ciągu współczynników Fouriera-Stieltjesa w nieskończoności.

**Uwaga 3.6.13.** *Punkt* 1 *poprzedniego twierdzenia jest nie prawdziwy, gdy odrzucimy założenie $\mu \in M_0(\mathbb{T})$.*

*Dowód.* Wybierzmy punkt $\tau \in \mathbb{T}$ o rządzie nieskończonym. Można udowodnić, że

$$\sigma(\delta_\tau) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Zatem, jeśli $h \in \mathfrak{M}(M(\mathbb{T}))\backslash\mathbb{Z}$, to $h(\delta_x) \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, co przeczy punktowi 1 cytowanego twierdzenia. $\square$

Podamy teraz użyteczny w dalszej części pracy wniosek wynikający wprost z twierdzenia 3.6.12.

**Wniosek 3.6.14.** *Algebra ilorazowa $\mathscr{C}/L^1(\mathbb{T})$ ma pustą przestrzeń ideałów maksymalnych.*

Korzystając z tego wniosku możemy stworzyć nową metodę wykazywania, że miara nie ma naturalnego spektrum. Wprowadźmy definicję potęgi splotowej.

**Definicja 3.6.15.** *Niech $\mu \in M(\mathbb{T})$. Przyjmujemy $\mu^1 := \mu$ oraz $\mu^n = \mu^{n-1} * \mu$ dla $n \geqslant 2$.*

**Twierdzenie 3.6.16.** *Niech $\mu \in M_0(\mathbb{T})$ będzie miarą niezerową. Załóżmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ miara $\mu^n$ jest singularna (względem miary Lebesgue'a). Wtedy $\sigma(\mu) \neq \widehat{\mu}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}$, czyli dla miary $\mu$ zachodzi fenomen Wienera-Pitta.*

*Dowód.* Załóżmy przeciwnie, to znaczy $\sigma(\mu) = \widehat{\mu}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}$, a więc $\mu \in \mathscr{C}$. Z wniosku poprzedzającego twierdzenie oraz wzoru na promień spektralny dostajemy

$$\lim_{n\to\infty} \left(||\mu^n + L^1(\mathbb{T})||_{\mathscr{C}/L^1(\mathbb{T})}\right)^{\frac{1}{n}} = 0.$$

W oparciu o definicję normy w algebrze ilorazowej mamy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\inf\{||\mu^n + f|| : f \in L^1(\mathbb{T})\}\right)^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Skoro $\mu^n$ są miarami singularnymi, to $||\mu^n + f|| = ||\mu^n|| + ||f|| \geqslant ||\mu^n||$ dla wszystkich $f \in L^1(\mathbb{T})$ oraz $n \geqslant 1$. Zatem

$$\lim_{n\to\infty} ||\mu^n||^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Z definicji promienia spektralnego jest to możliwe tylko, gdy $\sigma(\mu) = \{0\}$, a więc $\widehat{\mu}(\mathbb{Z}) = \{0\}$. Ostatecznie $\mu \equiv 0$, co jest sprzecznością dowodzącą słuszności twierdzenia. $\square$

Za pomocą tego twierdzenia dowiemy się w następnym podrozdziale wiele o spektrach produktów Riesza.
Pokażemy teraz inne zastosowania twierdzenia 3.6.12. Użyteczna będzie dla Nas pewna konwencja notacyjna opisana w poniższej definicji.

**Definicja 3.6.17.** *Jeśli $\mu \in M(\mathbb{T})$ oraz $f \in L^1(\mu)$, to przez $\nu = f\mu$ będziemy oznaczać jedyną miarę określoną przez warunek $d\nu = fd\mu$.*

Udowodnimy teraz prosty lemat.

**Lemat 3.6.18.** *Niech $\mu \in M_0(\mathbb{T})$. Jeśli $\nu \in M(\mathbb{T})$ jest takie, że $\nu \ll |\mu|$, to $\nu \in M_0(\mathbb{T})$.*

*Dowód.* Skoro $\nu$ jest absolutnie ciągła względem $\mu$, to istnieje $f \in L^1(\mu)$ takie, że $\nu = f\mu$. Pokażemy, że $\widehat{\nu}$ znika w $\infty$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieje wtedy wielomian trygonometryczny $P$ taki, że

$$\int_{\mathbb{T}} |f - P| d|\mu| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Niech $\nu_P = P\mu$. Wtedy

$$\widehat{\nu_P}(n) = \sum_{k=1}^{n} a_k \widehat{\mu}(n - n_k) \text{ dla } n \in \mathbb{Z}, \text{ gdzie } P = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi^{n_k}.$$

Skoro $\widehat{\mu}$ znika w $\infty$, to istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $|\widehat{\nu_P}(n)| < \frac{\varepsilon}{2}$ dla $n > |N|$. Łącząc te rezultaty dostajemy, dla $n > |N|$

$$|\widehat{\nu}(n)| \leqslant |\widehat{\nu}(n) - \widehat{\nu_P}(n)| + |\widehat{\nu_P}(n)| = |\int_{\mathbb{T}} (\overline{e^{inx}}(f(x) - P(x))d\mu(x)| + |\widehat{\nu_P}(n)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Z dowolności $\varepsilon > 0$ jest to koniec dowodu. □

Możemy teraz sformułować ważne twierdzenie świadczące o tym, że własność naturalnego spektrum przenosi się przez relację absolutnej ciągłości.

**Twierdzenie 3.6.19.** *Niech $\mu \in \mathscr{C}$. Jeśli $\nu \in M(\mathbb{T})$ spełnia $\nu \ll |\mu|$, to $\nu \in \mathscr{C}$.*

*Dowód.* Z lematu poprzedzającego twierdzenie, wiemy, że $\nu \in M_0(\mathbb{T})$. Teza twierdzenia zostanie wykazana, jeśli sprawdzimy warunek $\sigma(\nu) = \widehat{\nu}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}$. Weźmy $\chi^n$ dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$. Na początek uzasadnimy tożsamość

$$(\chi^n \mu_1) * (\chi^n \mu_2) = \chi^n (\mu_1 * \mu_2) \text{ dla wszystkich } \mu_1, \mu_2 \in M(\mathbb{T}). \tag{3.5}$$

Dokonamy tego obliczając współczynniki Fouriera-Stieltjesa obu stron w oparciu o znane reguły. Niech $m \in \mathbb{Z}$ oraz $\nu = (\chi^n \mu_1) * (\chi^n \mu_2)$

$$\widehat{\nu}(m) = \widehat{\chi^n \mu_1}(m) \cdot \widehat{\chi^n \mu_2}(m) = \widehat{\mu_1}(m - n) \cdot \widehat{\mu_2}(m - n).$$

Z drugiej strony, oznaczając $\lambda = \chi^n (\mu_1 * \mu_2)$ dostajemy

$$\widehat{\lambda}(m) = (\widehat{\mu_1 * \mu_2})(m - n) = \widehat{\mu_1}(m - n) \cdot \widehat{\mu_2}(m - n).$$

Zatem obie miary występujące w równaniu 3.5 mają te same współczynniki Fouriera-Stieltjesa, co kończy dowód tej równości.
Oznaczmy $\mu_{\chi^n} = \chi^n \mu$ dla $n \in \mathbb{Z}$ oraz $R_{\chi^n}(\lambda) = \chi^n R(\lambda, \mu) = \chi^n (\mu - \lambda\delta)^{-1}$ dla $\lambda \notin \sigma(\mu)$. Z równości 3.5 otrzymujemy, że jeśli $\lambda \notin \sigma(\mu)$, to $R(\lambda, \mu_{\chi^n}) = (\mu_{\chi^n} - \lambda\delta)^{-1}$ istnieje i zachodzi tożsamość $R(\lambda, \mu_{\chi^n}) = R_{\chi^n}(\lambda)$. Rzeczywiście, wystarczy, że uzasadnimy równość

$$R_{\chi^n}(\lambda) * (\mu_{\chi^n - \lambda\delta}) = \delta.$$

Wtedy skoro $R_{\chi^n}(\lambda)$ istnieje oraz jest odwrotnością elementu $\mu_{\chi^n} - \lambda\delta$, to oczywiście $R_{\chi^n}(\lambda) = R(\lambda, \mu_{\chi^n})$. Dokonamy teraz ciągu przekształceń

$$\begin{aligned}
&R_{\chi^n}(\lambda) * (\mu_{\chi^n - \lambda\delta}) = (\chi^n R(\lambda, \mu)) * (\chi^n \mu - \lambda\delta) = \\
&\chi^n (R(\lambda, \mu) * \mu) - \lambda\chi^n R(\lambda, \mu) = \chi^n (R(\lambda, \mu) * (\mu - \lambda\delta)) = \\
&\chi^n \delta = \delta.
\end{aligned}$$

Zatem $\lambda \notin \sigma(\mu_{\chi^n})$, co prowadzi do zawierania $\sigma(\mu_{\chi^n}) \subset \sigma(\mu)$. Zauważmy jednak, że $\mu = \overline{\chi^n} \mu_{\chi^n}$, a więc przeprowadzając takie samo rozumowanie dostaniemy $\sigma(\mu) \subset \sigma(\mu_{\chi^n})$, czyli $\sigma(\mu) = \sigma(\mu_{\chi^n}) = \widehat{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$. Pamiętając, iż $\widehat{\mu_{\chi^n}}(\mathbb{Z}) = \widehat{\mu}(\mathbb{Z})$ otrzymujemy ostatecznie

$$\sigma(\mu_{\chi^n}) = \widehat{\mu_{\chi^n}}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}.$$

Stąd $\mu_{\chi^n} \in \mathscr{C}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{Z}$. Dalsza część dowodu opiera się na argumencie gęstościowym.
Niech $P = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi^{n_k}$ będzie wielomianem trygonometrycznym i oznaczmy $\nu_P = P\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu_{\chi^{n_k}}$. Teraz, $\nu_P$ jest kombinacją liniową elementów z $\mathscr{C}$, a więc z twierdzenia 3.6.12 dostajemy

$$\sigma(\nu_P) = \widehat{\nu_P}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}. \tag{3.6}$$

Zbiór $\{P\mu : P -$ wielomian trygonometryczny$\}$ jest gęsty w zbiorze $\{f\mu : f \in L^1(\mu)\}$, co w połączeniu z równaniem 3.6 daje $\sigma(f\mu) = \widehat{f\mu}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}$ dla wszystkich $f \in L^1(\mu)$. Dowód kończy przypomnienie sobie założenia $v \ll |\mu|$ (stąd $v = f|\mu|$ dla pewnego $f \in L^1(\mu)$). □

Za pomocą ostatniego twierdzenia oraz twierdzenia 3.6.12 możemy podać rezultat ogólniejszy. Najpierw jednak potrzebna pewna konwencja notacyjna.

**Definicja 3.6.20.** *Niech $\mathscr{F} \subset M(\mathbb{T})$ będzie zbiorem miar. Piszemy $\mu \perp \mathscr{F}$ dla $\mu \in M(\mathbb{T})$, gdy zachodzi warunek*

$$\mu \perp \nu \text{ dla wszystkich } \nu \in \mathscr{F}.$$

**Twierdzenie 3.6.21.** *Jeśli $\mu \in M(\mathbb{T})$ jest miarą dodatnią taką, że $\mu^n$ jest singularna (względem miary Lebesgue'a) dla każdego $n \in \mathbb{Z}$, to $\mu \perp \mathscr{C}$.*

*Dowód.* Załóżmy przeciwnie, to znaczy niech $\nu \in \mathscr{C}$ będzie miarą, która nie jest singularna względem $\mu$. Z twierdzenia 3.6.19 $|\nu| \in \mathscr{C}$. Oczywiście miara $|\nu|$ także nie jest singularna względem $\mu$. Napiszmy jej rozkład Lebesgue'a względem $\mu$

$$|\nu| = \nu_1 + \nu_2, \text{ gdzie } \nu_1, \nu_2 \geqslant 0 \text{ oraz } \nu_1 \ll \mu,\ \nu_2 \perp \mu.$$

Z założenia $\nu_1 \neq 0$. Co więcej, z twierdzenia 3.6.19 $\nu_1 \in \mathscr{C}$. Teraz, z własności rozkładu Lebesgue'a otrzymujemy $\nu_1^n \ll \mu^n$ dla $n \in \mathbb{Z}$, a skoro $\mu^n$ jest singularna względem miary Lebesgue'a, to $\nu_1^n$ także. Tymczasem twierdzenie 3.6.16 implikuje, że $\sigma(\nu_1) \neq \widehat{\nu_1}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}$. Jest to sprzeczność kończąca dowód twierdzenia. □

**Komentarze i odniesienia do literatury.** Ten podrozdział stanowił szczegółowe omówienie pracy [Zafran]. Wyniki w niej zawarte są podstawowe dla całej pracy i dlatego postanowiłem zrobić to tak dokładnie.

## 3.7. Produkty Riesza

W podrozdziale "Fundamentalny przykład i fenomen Wienera-Pitta" zdefiniowaliśmy po raz pierwszy produkt Riesza. Zbadamy teraz klasę tych miar dokładniej, co pozwoli Nam wskazać obszerny zbiór miar singularnych należących do $M_0(\mathbb{T})$, dla których zachodzi fenomen Wienera-Pitta. Okaże się również, iż istnieją miary singularne o naturalnym spektrum.
Zacznijmy od prostego lematu o własnościach arytmetycznych ciągów lakunarnych.

**Lemat 3.7.1.** *Niech $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem lakunarnym spełniającym $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant q \geqslant 3$ dla pewnego $q \in \mathbb{R}$. Wtedy każda liczba całkowita $m \in \mathbb{Z}$ ma co najwyżej jedno przedstawienie w postaci*

$$m = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j n_j, \text{ gdzie } \varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\}. \tag{3.7}$$

*Dowód.* Weźmy liczbę całkowitą $m \in \mathbb{Z}$ i załóżmy, że ma ona przedstawienia postaci

$$m = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j n_j = \sum_{l=1}^{t} \varepsilon'_l n_l, \text{ gdzie } \varepsilon_j, \varepsilon'_l \in \{-1, 0, 1\}.$$

Po pierwsze, zauważmy, że musi zachodzić $k = t$ oraz $\varepsilon_k = \varepsilon'_t$ (to znaczy współczynniki przy $\varepsilon_j$ lub $\varepsilon'_l$ przy indeksach wyższych niż $\min(k, t)$ są zerowe). W przeciwnym przypadku możemy bez straty ogólności założyć, że $t > k$. Wtedy przekładając wyraz najwyższy na jedną stronę otrzymamy równość

$$n_t = \sum_{j=1}^{t-1} a_j n_j, \text{ gdzie } a_j \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

Jednakże (korzystamy z lakunarności oraz wzoru na sumę szeregu geometrycznego).

$$\sum_{j=1}^{t-1} a_j n_j \leqslant 2 \sum_{j=1}^{t-1} n_j \leqslant 2n_{t-1} \sum_{j=1}^{t-1} \frac{1}{q^{t-j-1}} < \frac{2n_{t-1}q}{q-1}.$$

Z założenia jednak $n_t \geqslant qn_{t-1}$. W oparciu o warunek $q \geqslant 3$ dostajemy $qn_{t-1} \geqslant \frac{2n_{t-1}q}{q-1}$, co jest spodziewaną sprzecznością (jedna z nierówności była ostra). Dowód lematu kończy zastosowanie identycznego argumentu do niższych wskaźników. □

Ze względu na równości $12 = 16 - 4 = 2^4 - 2^2 = 8 + 4 = 2^3 + 2^2$ widzimy, że liczba 3 jest najmniejszą liczbą naturalną zapewniającą jednoznaczność przedstawienia 3.7.
Ustalmy ciąg liczb rzeczywistych $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ spełniający $-1 \leqslant a_k \leqslant 1$ oraz $a_k \neq 0$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$. Weźmy także ciąg lakunarny $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ taki, że $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant q \geqslant 3$ dla pewnego $q \in \mathbb{N}$. Rozważmy skończony iloczyn postaci

$$R_N(t) = \prod_{k=1}^{N} (1 + a_k \cos n_k t).$$

Tak samo jak wcześniej bez trudu udowadniamy następujące stwierdzenie.

**Stwierdzenie 3.7.2.** *Ciąg $(R_N)_{N\in\mathbb{N}}$ przy ustalonych wyżej założeniach jest słabo z-$^*$ zbieżny do pewnej miary dodatniej $R = R(a_k, n_k)$. Miara ta ma współczynniki Fouriera-Stieltjesa postaci*

$$\widehat{R}(\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j n_j) = \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{a_j}{2}\right)^{|\varepsilon_j|}, \text{ gdzie } \varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\}$$

$$\widehat{R}(m) = 0 \text{ dla } m, \text{ których nie da się przedstawić w postaci takiej jak wyżej}$$

*Miarę $R = R(a_k, n_k)$ będziemy nazywać produktem Riesza. Ponadto piszemy*

$$R = R(a_k, n_k) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k \cos n_k t), \tag{3.8}$$

*co należy rozumieć jako zdanie: "miara $R$ jest reprezentowana przed produkt 3.8" (to znaczy powstaje jako słaba$^*$ granica ciągu miar $(R_N)_{N\in\mathbb{N}}$).*

Wprost z postaci współczynników Fouriera produktu Riesza możemy podać poniższy wniosek.

**Wniosek 3.7.3.** *$R(a_k, n_k)$ przy założeniach na ciągi $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ oraz $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jak wcześniej należy do $M_0(\mathbb{T})$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Wykażemy teraz, że każdy produkt Riesza jest miarą ciągłą.

**Fakt 3.7.4.** *Niech $R = R(a_k, n_k)$ będzie produktem Riesza. Wtedy $R \in M_c(\mathbb{T})$.*

*Dowód.* Zgodnie z lematem Wienera wystarczy udowodnić, że

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |\widehat{R}(n)|^2 = 0$$

Uzasadnimy teraz, iż można ograniczyć się do produktu $R(1, 3^k)$. Rzeczywiście, będziemy szacować współczynniki Fouriera-Stieltjesa z góry, a także im szybciej ciąg $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dąży do nieskończoności, tym "rzadziej" będą rozłożone współczynniki Fouriera-Stieltjesa. Dalej, dla każdego $k \in \mathbb{N}$ $|a_k| < 1$ oraz z lakunarności $n_k \geqslant q^k \geqslant 3^k$.
Od teraz $R = R(1, 3^k)$. Ustalmy liczbę $N \in \mathbb{N}$. Oczywiście, jeśli liczba naturalna $m$ ma przedstawienie w postaci

$$m = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j 3^j \text{ dla } \varepsilon \in \{-1, 0, 1\}, \tag{3.9}$$

to $-m$ także ma odpowiednie przedstawienie, więc możemy ograniczać się do zliczania dodatnich współczynników Fouriera-Stieltjesa. Skoro $m \in [0, N]$, to musi zachodzić $3^k \leqslant N$, czyli $k \leqslant \frac{\ln N}{\ln 3}$ (wynika to z faktu, że w ciągu $3^k$ każdy wyraz jest większy od sumy wszystkich poprzednich). Teraz przejdźmy do szacowania wartości kwadratów współczynników Fouriera-Stieltjesa. Odpowiada za nią jedynie liczba niezerowych $\varepsilon_j$ w rozkładzie. Przyjmijmy oznaczenie $w_k$ - suma wartości kwadratów wszystkich współczynników produktu Riesza, których indeksy można zapisać w postaci 3.9. Na mocy poprzedniej uwagi dostajemy

$$w_k \leqslant \frac{k}{2} + \frac{\binom{k}{2}}{4^2} + \ldots + \frac{\binom{k}{k-1}}{2^{2(k-1)}} + \frac{1}{2^k} = \sum_{l=1}^{k} \frac{\binom{k}{l}}{2^{2l}} \leqslant \left(1 + \frac{1}{4}\right)^k = \left(\frac{5}{4}\right)^k.$$

Łącząc ten wynik z poprzednim oszacowaniem, dostajemy

$$\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |\widehat{R}(n)|^2 \leqslant \frac{2\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{\ln N}{\ln 3}}}{2N+1} = \frac{2N^{\frac{\ln 5 - \ln 4}{\ln 3}}}{2N+1},$$

co kończy dowód. □

Zauważyliśmy wcześniej, że produkt Riesza $R(1, 3^k)$ nie jest miarą absolutnie ciągłą względem miary Lebesgue'a. Warto się zastanowić, czy jest to prawdą dla dowolnego produktu Riesza. Częściową odpowiedź na to pytanie zawiera poniższy fakt.

**Fakt 3.7.5.** *Jeśli $(a_n) \in l^2(\mathbb{Z})$, to produkt Riesza $R(a_k, n_k)$ jest miarą absolutnie ciągłą względem miary Lebesgue'a.*

*Dowód.* Niech $R = R(a_k, n_k)$. Wystarczy udowodnić, że $(\widehat{R}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$. Wtedy z twierdzenia Riesza-Fischera miara $R$ będzie miarą absolutnie ciągłą z gęstością całkowalną z kwadratem. Przypominając sobie oznaczenie

$$R_N(t) = \prod_{k=1}^{N}(1 + a_k \cos n_k t) \text{ dla } N \in \mathbb{N}$$

oraz fakt, iż $\widehat{R}(n) = \widehat{R_N}(n)$ dla $|n| \leqslant N$ widzimy, że wystarczy uzasadnić nierówność

$$\sum_{n=-N}^{N} |\widehat{R_N}(n)^2| < C \text{ dla pewnej stałej } C > 0 \text{ niezależnej od } N.$$

W tym celu zastosujemy tożsamość Parsevala

$$\sum_{n=-N}^{N} |\widehat{R_N}(n)^2| = ||R_N||^2_{L^2(\mathbb{T})}.$$

Dokonajmy najpierw prostego przekształcenia.

$$(1 + a_k \cos n_k t)^2 = 1 + 2a_k \cos n_k t + a_k^2 \cos n_k^2 t = 1 + \frac{a_k^2}{2} + 2a_k \cos n_k t + \frac{a_k^2}{2} \cos 2n_k t.$$

W związku z tym otrzymujemy

$$||R_N||^2_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^{N}(1 + \frac{a_k^2}{2} + 2a_k \cos n_k t + \frac{a_k^2}{2} \cos 2n_k t)dt = \prod_{k=1}^{N}(1 + \frac{a_k^2}{2}) \leqslant \prod_{k=1}^{N}(1 + a_k^2).$$

Przedostatnia równość wynika stąd, że po wypisaniu iloczynu uzyskamy sumę wyrażenia $\prod_{k=1}^{N}(1 + a_k^2)$ oraz innych, w których występują funkcje postaci $\cos n_{i_1}t \cdot \cos n_{i_2}t \ldots \cos n_{i_m}t$ mające całkę równą zero (wszystkie $n_{i_l}$ muszą być różne ze względu na warunek $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant 3$). Ostatecznie dostajemy

$$\sum_{n=-N}^{N} |\widehat{R_N}(n)^2| = ||R_N||^2_{L^2(\mathbb{T})} \leqslant \prod_{k=1}^{N}(1 + a_k^2) \leqslant \prod_{k=1}^{\infty}(1 + a_k^2) < \infty,$$

co kończy dowód. □

Zastanowimy się teraz, jaka jest relacja pomiędzy różnymi produktami Riesza. Zaczniemy od prostszego przypadku.

Bardzo naturalnym pytaniem jest, co się dzieje w przypadku, gdy różnica ciągów $a_k$ i $b_k$ nie jest sumowalna z kwadratem. Okazuje się, że ten warunek wymusza już wzajemną osobliwość produktów Riesza (zakładając, że $n_k = m_k$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$). Jest to ważny wynik, którego dowód jest bardzo ciekawy, o czym przekonamy się za chwilę.

**Stwierdzenie 3.7.6.** *Niech $R_1 = R(a_k, n_k)$, $R_2 = R(b_k, n_k)$ będą produktami Riesza takimi, że*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - b_k)^2 = \infty.$$

*Wtedy miary $R_1$ i $R_2$ są wzajemnie osobliwe.*

*Dowód.* Dla wygody przyjmijmy $a_k = \widehat{R_1}(n_k)$, $b_k = \widehat{R_2}(n_k)$ zamiast oznaczeń występujących w sformułowaniu stwierdzenia (podzieliliśmy wyrazy ciągów $a_k$ i $b_k$ przez dwa). Przy tych założeniach obowiązuje oczywiście nadal ta sama nierówność.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - b_k|^2 = \infty.$$

Możemy więc dobrać ciąg liczb zespolonych $(c_l)_{l\in\mathbb{N}}$ oraz rosnący ciąg liczb naturalnych $l(k)$ takie, że $(c_l)_{l\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$, a ponadto

$$\sum_{l=l(k)+1}^{l(k+1)} c_l(a_l - b_l) = 1 \text{ dla } k \geqslant 1 \tag{3.10}$$

Określmy teraz wielomiany trygonometryczne $f_k$ wzorem

$$f_k(t) = \sum_{l=l(k)+1}^{l(k+1)} c_l(e^{in_lt} - b_l).$$

Uzasadnimy teraz, że zachodzą poniższe przejścia graniczne.

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{T}} |f_k|^2 dR_1 = 0,$$
$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{T}} |f_k|^2 dR_2 = 1.$$

W tym celu musimy wykonać rachunek (pomijamy dokładne indeksy sumowania dla lepszej czytelności).

$$|f_k(t)|^2 = f_k(t)\overline{f_k(t)} = \sum_l c_l(e^{in_lt} - b_l) \cdot \sum_r \overline{c_r}(e^{-in_rt} - b_r) =$$
$$\sum_l |c_l|^2 + \sum_{l\neq r} c_l\overline{c_r}e^{-i(n_r-n_l)t} - \sum_r \overline{c_r}b_r \cdot \sum_l c_le^{in_lt} - \sum_l c_lb_l \cdot \sum_r \overline{c_r}e^{-in_rt} + \sum_l c_lb_l \cdot \sum_r \overline{c_r}b_r$$

Stąd

$$\int_{\mathbb{T}} |f_k|^2 dR_2 = \sum_l |c_l|^2 + \sum_{l\neq r} c_l\overline{c_r}b_lb_r - \sum_r \overline{c_r}b_r \cdot \sum_l c_lb_l =$$
$$\sum_l |c_l|^2 - \sum_l |c_l|^2 b_l^2 = \sum_l |c_l|^2(1 - b_l^2).$$

Powracając do indeksów sumowania dostaniemy

$$\int_{\mathbb{T}} |f_k|^2 dR_2 = \sum_{l=l(k)+1}^{l(k+1)} |c_l|^2(1 - b_l^2) \leqslant \sum_{l=l(k)+1}^{l(k+1)} |c_l|^2 \to 0 \text{ przy } k \to \infty.$$

Obliczamy teraz drugą granicę (będziemy istotnie wykorzystać równanie 3.10).

$$\int_{\mathbb{T}} |f_k|^2 dR_1 =$$
$$\sum_l |c_l|^2 + \sum_{l\neq r} c_l\overline{c_r}a_ra_l - \sum_r \overline{c_r}b_r \cdot \sum_l c_la_l - \sum_l c_lb_l \cdot \sum_r \overline{c_r}a_r + \sum_l c_lb_l \cdot \sum_r \overline{c_r}b_r =$$
$$\sum_l |c_l|^2 + \sum_l c_la_l \cdot \sum_r \overline{c_r}a_r - \sum_l |c_l|^2a_l^2 - \sum_r \overline{c_r}b_r \cdot \sum_l c_la_l - \sum_l c_lb_l =$$
$$\sum_l |c_l|^2 - \sum_l |c_l|^2a_l^2 + \sum_l c_la_l - \sum_l c_lb_l =$$
$$1 + \sum_l |c_l|^2(1 - a_l^2).$$

Zatem

$$\int_{\mathbb{T}} |f_k|^2 dR_1 = 1 + \sum_{l=l(k)+1}^{l(k+1)} |c_l|^2(1-a_l^2) \to 1 \text{ przy } k \to \infty.$$

Wykażemy teraz, że

$$\lim_{k\to\infty} f_k = 1 \text{ w } L^1(R_1). \tag{3.11}$$

Korzystając z nierówności Schwarza dostajemy

$$\left(\int_{\mathbb{T}} |f_k - 1| dR_1\right)^2 \leqslant \int_{\mathbb{T}} |f_k - 1|^2 dR_1 = \int_{\mathbb{T}} |f_k|^2 dR_1 - 2Re \int_{\mathbb{T}} f_k dR_1 + 1$$

$$\int_{\mathbb{T}} |f_k|^2 dR_1 - 2Re \sum_{l=l(k)+1}^{l(k+1)} c_l(a_j - b_j) + 1 \to 0 \text{ przy } k \to \infty,$$

co dowodzi równości 3.11. Wybierzmy teraz podciąg (z ciągu ograniczonego w $L^2(R_2)$ można wybrać podciąg zbieżny prawie wszędzie) $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ taki, że

$$\lim_{j\to\infty} f_{k_j}(t) = 0 \text{ dla } t \in F, \text{ gdzie } F\text{-borelowski spełnia } R_2(F) = 1.$$

Z drugiej strony

$$\lim_{j\to\infty} f_{k_j} = 1 \text{ w } L^1(R_1),$$

co prowadzi do wniosku $R_1(F) = 0$. Obie miary są dodatnie i mają normę 1, więc jest to możliwe tylko, gdy $R_1 \perp R_2$, czego należało dowieść. □

Produkt Riesza $R = R(0, n_k)$ jest po prostu miarą Lebesgue'a, dzięki czemu dostajemy ważny wniosek.

**Wniosek 3.7.7.** *Niech $R = R(a_k, n_k)$ będzie produktem Riesza. Jeśli zachodzi warunek*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2 = \infty,$$

*to miara $R$ jest singularna.*

Zanim przejdziemy do rozważenia przypadku sumowalności z kwadratem różnicy ciągów $a_k$ i $b_k$ wprowadzimy pewną definicję.

**Definicja 3.7.8.** *Powiemy, że miary $\mu, \nu$ są równoważne (oznaczenie $\mu \sim \nu$), jeśli są skupione na tych samych zbiorach (równoważnie, gdy $\mu \ll \nu$ oraz $\nu \ll \mu$).*

Kierując się w stronę następnego stwierdzenia będziemy potrzebować dwóch technicznych lematów oraz nieco więcej konwencji notacyjnej.

**Lemat 3.7.9.** *Niech $\mu \in M(\mathbb{T})$ oraz $f, g \in L^1(\mu)$ będą takie, że miary $f\mu$ oraz $g\mu$ są miarami probabilistycznymi (zakładamy tutaj w szczególności, że $\mu, f, g \geqslant 0$). Wtedy*

$$\left(\int_{\mathbb{T}} |f - g| d\mu\right)^2 \leqslant 4\left(1 - \left(\int_{\mathbb{T}} \sqrt{f}\sqrt{g}\right)\right).$$

*Dowód.* Z nierówności Schwarza oraz założeń dostajemy

$$\left(\int_{\mathbb{T}} |f-g|d\mu\right)^2 \leqslant \left(\int_{\mathbb{T}} |\sqrt{f}-\sqrt{g}|^2 d\mu\right)\left(\int_{\mathbb{T}} |\sqrt{f}+\sqrt{g}|^2 d\mu\right) =$$
$$\left(2-2\int_{\mathbb{T}} \sqrt{f}\sqrt{g}d\mu\right)\left(2+2\int_{\mathbb{T}} \sqrt{f}\sqrt{g}d\mu\right) = 4\left(1-\left(\int_{\mathbb{T}} \sqrt{f}\sqrt{g}d\mu\right)\right)$$

□

Wprowadzimy teraz trochę notacji, która ułatwi dalszą pracę.

**Definicja 3.7.10.** *Niech $R_1 = R(a_k, n_k)$, $R_2 = R(b_k, n_k)$ będą produktami Riesza. Wprowadzamy oznaczenia*

$$q_k = 1 + a_k \cos n_k t,\ \ q'_k = 1 + b_k \cos n_k t$$
$$p_n = \prod_{k=1}^{n} q_k\ \ p'_n = \prod_{k=1}^{n} q'_k$$
$$h(n,r,s) = p'_n \prod_{k=n+r+1}^{n+r+s} q_k,\ \ I(n,r,s) = \int_{\mathbb{T}} \sqrt{q_k q'_k} h(n,r,s)dy,$$

*gdzie $n, r, s \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 0$, $r \geqslant 1$, $s \geqslant 1$. Wtedy $h(n,r,s)$ jest nieujemną funkcją ciągłą na $\mathbb{T}$.*

Z nierówności Schwarza dostajemy prostą uwagę.

**Uwaga 3.7.11.** *Niech $n, r, s \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 0$, $r \geqslant 1$, $s \geqslant 1$. Wówczas $0 \leqslant I(n,r,s) \leqslant 1$.*

Możemy teraz udowodnić drugi lemat.

**Lemat 3.7.12.** *Niech $\mu = R(a_k, n_k)$ oraz $\nu = R(b_k, n_k)$ będą produktami Riesza. Załóżmy, że*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\inf_{r,s} I(n,r,s)\right) = 1.$$

*Wtedy $\nu \ll \nu$ oraz*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p'_n} = \frac{d\nu}{d\mu}\ \ w\ L^1(\mu),$$

*gdzie $\frac{d\nu}{d\mu}$ oznacza gęstość miary $\nu$ względem $\mu$.*

*Dowód.* Bez straty ogólności możemy założyć, że $|p_n| > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Z definicji produktu Riesza dostajemy dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{s\to\infty} \frac{p'_n}{p_n} p_{n+s} = \frac{p'_n}{p_n}\mu \text{ słabo}^* \text{ w } M(\mathbb{T}).$$

Zatem

$$\int_{\mathbb{T}} |\frac{p'_n}{p_n} - \frac{p'_{n+r}}{p_{n+r}}|d\mu = \lim_{s\to\infty} \int_{\mathbb{T}} |\frac{p'_n}{p_n} - \frac{p'_{n+r}}{p_{n+r}}|p_{n+r+s}dt =$$
$$\lim_{s\to\infty} \int_{\mathbb{T}} |\prod_{k=1}^{n+r} q_k - \prod_{k=1}^{n+r} q'_k|p'_n \prod_{k=n+r+1}^{n+r+s} q_k dt.$$

Zauważmy teraz, że $h(n,r,s)$ jako miara absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a na okręgu jest miarą probabilistyczną. Możemy więc zastosować lemat 3.7.9 uzyskując

$$\int_{\mathbb{T}} |\prod_{k=1}^{n+r} q_k - \prod_{k=1}^{n+r} q_k'|p_n' \prod_{k=n+r+1}^{n+r+s} q_k dt \leqslant 4(1 - I(n,r,s)^2).$$

Z założenia jednak ostanie wyrażenie dąży do zera przy $n$ dążącym do nieskończoności. Stąd ciąg $\left(\frac{p_n'}{p_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $L^1(\mu)$. Zauważmy jeszcze, że ciąg $\left(\frac{p_n'}{p_n}\mu\right)$ jest słabo * zbieżny do $\nu$ (z definicji produktów Riesza), a więc

$$\lim_{n\to\infty} ||\frac{p_n'}{p_n}\mu - \nu||_{M(\mathbb{T})} = 0,$$

co prowadzi do wniosku $\nu \ll \mu$ i kończy dowód lematu. □

**Stwierdzenie 3.7.13.** *Niech $R_1 = R(a_k, n_k)$, $R_2 = R(b_k, m_k)$ będą produktami Riesza. Jeśli zachodzi warunek*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)^2 < \infty,$$

*to miary $R_1$ i $R_2$ są równoważne.*

*Dowód.* Załóżmy na początek, że $n_k = m_k$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}$. Jest jasne, że pomnożenie wszystkich liczb $a_k, b_k$ przez pewną stałą nie wpłynie na zbieżność szeregu występującego w szeregu, więc przyjmiemy $a_k = \widehat{R_1}(n_k)$, $b_k = \widehat{R_2}(n_k)$ (pomnożyliśmy przez dwa). Zamiast zakładać warunek opisany w stwierdzeniu będziemy przyjmować, iż

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k - b_k|^2}{2 - |a_k - b_k|^2} < \infty. \tag{3.12}$$

Jest jasne, że zbieżność oryginalnego szeregu implikuje zbieżność szeregu w równaniu 3.12. Korzystając z naszej konwencji notacyjnej (zobacz definicje 3.7.10) przeprowadzimy rachunek dla ustalonych $n, r \in \mathbb{N}$, $n, r \geqslant 1$.

$$\prod_{k=n+1}^{n+r} \sqrt{q_k q_k'} = \prod_{k=n+1}^{n+r} \left[ \left(\frac{1}{2}q_k + \frac{1}{2}q_k'\right) \prod_{k=n+1}^{n+r} \left(2 - \frac{(q_k - q_k')^2}{(q_k + q_k')^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \geqslant$$

$$\prod_{k=n+1}^{n+r} \left[ \left(\frac{1}{2}q_k + \frac{1}{2}q_k'\right) \prod_{k=n+1}^{n+r} \left(2 - \frac{(q_k - q_k')^2}{(q_k + q_k')^2}\right) \right] \geqslant$$

$$\left[\prod_{k=n+1}^{n+r} \sqrt{q_k q_k'}\right] \left[1 - \prod_{k=n+1}^{n+r} \frac{(q_k - q_k')^2}{(q_k + q_k')^2}\right]$$

$$\prod_{k=n+1}^{n+r} (\frac{1}{2}q_k + \frac{1}{2}q_k') - \sum_{j=n+1}^{n+r} \left[ \left( \prod_{i=n+1, i\neq j}^{n+r} (\frac{1}{2}q_j + \frac{1}{2}q_j') \right) \frac{(q_j - q_j')^2}{\inf_x (q_j(x) + q_j(x)')} \right].$$

Z definicji produktów Riesza mamy jednak

$$\inf_x (q_j(x) + q_j(x)') \geqslant 2 - |a_j - b_j| \text{ dla } j \in \mathbb{N}.$$

Ponadto

$$\int_{\mathbb{T}} \prod_{i=n+1, i\neq j}^{n+r} (\frac{1}{2}q_i + \frac{1}{2}q_i')(q_j - q_j')^2 h(n,r,s) dy = |a_j - b_j|^2.$$

Zatem

$$I(n,r,s) \geqslant \int_{\mathbb{T}} \prod_{k=n+1}^{n+r} (\frac{1}{2}q_k + \frac{1}{2}q'_k)h(n,r,s)dy - \sum_{j=n+1}^{n+r} \frac{(a_j - b_j)^2}{2 - |a_j - b_j|^2}$$

$$1 - \sum_{j=n+1}^{n+r} \frac{(a_j - b_j)^2}{2 - (a_j - b_j)^2}.$$

Z równania 3.12 wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{r,s} I(n,r,s) = 1.$$

Są zatem spełnione założenia lematu 3.7.12, co dowodzi, że $R_2 \ll R_1$. Warunek występujący w założeniach jest jednak symetryczny, a stąd $R_1 \sim R_2$. Jest to koniec dowodu w przypadku, gdy $m_k = n_k$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$.
Niech teraz $m_k \neq n_k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Możemy znaleźć odpowiedni ciąg $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ będący przecięciem ciągów $m_k$ i $n_k$ (ustawionym w kolejności rosnącej). Jest to również ciąg lakunarny i oznaczając przez $\mu_1$ produkt Riesza oparty na ciągu $l_k$ oraz odpowiednio zmienionym ciągu $c_k$ (powstałym z ciągu $a_k$ zgodnie z tym, jak powstaje ciąg $l_k$ z ciągu $n_k$) i analogicznie niech $d_k$ będzie ciągiem powstałym z $b_k$. Z udowodnionego już faktu dostaniemy, że $R_2 \sim \mu_1$ oraz $\mu \sim \mu_1$, co kończy dowód w przypadku ogólnym. □

W ten sposób dla produktów Riesza opartych na tych samych ciągach otrzymujemy następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 3.7.14.** *Niech $R_1 = R(a_k, n_k)$, $R_2 = R(b_k, n_k)$ będą produktami Riesza. Zachodzi następująca dychotomia*

$$\textit{Jeśli } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k - b_k|^2 = \infty, \textit{ to } R_1 \perp R_2.$$

$$\textit{Jeśli } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k - b_k|^2 < \infty, \textit{ to } R_1 \sim R_2.$$

*W szczególności zachodzą następujące fakty.*

$$\textit{Jeśli } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \infty, \textit{ to } R_1 \textit{ jest miarą singularną.}$$

$$\textit{Jeśli } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty, \textit{ to } R_1 \textit{ jest miarą absolutnie ciągłą.}$$

Zastosujemy teraz twierdzenia zawarte w pracy Zafrana do sklasyfikowania produktów Riesza w algebrze $M_0(\mathbb{T})$ pod względem naturalności spektrum. Najpierw poczynimy prostą uwagę.

**Uwaga 3.7.15.** *Jeśli $\mu = R(a_k, n_k)$, to $\mu^n = R(2\left(\frac{a_k}{2}\right)^n, n_k)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to znaczy*

$$\mu^n = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + 2\left(\frac{a_k}{2}\right)^n \cos n_k x),$$

*gdzie powyższa równość oznacza, że miara $\mu^n$ jest reprezentowana przez odpowiedni produkt.*

Dowód powyższej uwagi sprowadza się do porównania współczynników Fouriera-Stieltjesa miary $\mu^n$ oraz $R(2\left(\frac{a_k}{2}\right)^n, n_k)$.
Potrzebna Nam będzie jeszcze jedna prosta obserwacja.

**Fakt 3.7.16.** *Niech $\mu \in M_0(\mathbb{T})$. Jeśli $\mu^n \in \mathscr{C}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, to $\mu \in \mathscr{C}$.*

*Dowód.* Niech $n \in \mathbb{Z}$ będzie takie, że $\mu^n \in \mathscr{C}$. Zgodnie z wynikami Zafrana wiemy, iż

$$\varphi(\mu^n) = 0 \text{ dla każdego } \varphi \in M(\mathbb{T}) \setminus \mathbb{Z}.$$

Z multiplikatywności mamy jednak

$$0 = \varphi(\mu^n) = (\varphi(\mu))^n \text{ dla każdego } \varphi \in M(\mathbb{T}) \setminus \mathbb{Z}.$$

Zatem $\varphi(\mu) = 0$ dla każdego $\varphi \in M(\mathbb{T}) \setminus \mathbb{Z}$, czyli $\sigma(\mu) = \widehat{\mu}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}$, a stąd $\mu \in \mathscr{C}$, co kończy dowód. □

Możemy teraz sformułować twierdzenie.

**Twierdzenie 3.7.17.** *Niech $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych takim, że $-1 \leqslant a_k \leqslant 1$ oraz $a_k \to 0$, gdy $k \to \infty$. Niech $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb naturalnych spełniającym $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant q \geqslant 3$, gdzie $q$ jest ustaloną liczbą rzeczywistą. Niech $\mu = R(a_k, n_k)$ będzie miarą reprezentowaną przez produkt*

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 + a_k \cos n_k x).$$

*Wtedy $\sigma(\mu) = \widehat{\mu}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $n \in \mathbb{N}$ spełniające*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^n < \infty.$$

*Dowód.* Załóżmy, że istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^n < \infty. \tag{3.13}$$

Wtedy $\mu^n$ jest reprezentowane przez produkt

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 + 2\left(\frac{a_k}{2}\right)^n \cos n_k x).$$

Ze zbieżności szeregu w 3.13 mamy oczywiście

$$\sum_{k=1}^{\infty} |2(\frac{a_k}{2})^n|^2 < \infty.$$

Zatem $\mu^n$ jest miarą absolutnie ciągłą, więc $\mu^n \in \mathscr{C}$. Teraz w oparciu o poprzedni fakt dostajemy $\mu \in \mathscr{C}$.
Udowodnimy drugą implikację. Załóżmy, że dla każdego $m \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^m = \infty.$$

Weźmy teraz dowolną liczbę naturalną $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\mu^n = R(2\left(\frac{a_k}{2}\right)^n, n_k)$. Z naszego założenia mamy tym razem

$$\sum_{k=1}^{\infty} |2(\frac{a_k}{2})^n|^2 = \infty.$$

Korzystając z poprzednich rezultatów wiemy, że $\mu^n$ jest miarą singularną dla każdego $n \in \mathbb{N}$. W oparciu o kryterium dostajemy $\mu \notin \mathscr{C}$, co jest zakończeniem dowodu równoważności. □

**Komentarze i odniesienia do literatury.** Produkty Riesza zostały po raz pierwsze zdefiniowane w pracy F. Riesza w 1916. Podstawowe informacje o tej ważnej klasie miar można znaleźć w książce [Zygmund]. Dowodząc szczegółowe rezultaty zawarte w tym podrozdziale opierałem się na artykule [Brown,Moran] oraz monumentalnej książce [Graham,McGehee]. Analiza spektrów produktów Riesza pochodzi z pracy [Zafrana].

## 3.8. Asymetria i nieregularność algebry $M(\mathbb{T})$

W tym podrozdziale zbadamy pewne ważne własności algebry $M(\mathbb{T})$. Zobaczymy, że algebra miar jest algebrą wyjątkowo trudną do badania, to znaczy nie należy do żadnej z klas algebr o lepszych własnościach takich jak algebry symetryczne, czy algebry regularne.
Zacznijmy od definicji.

**Definicja 3.8.1.** *Algebrę Banacha $A$ nazywamy symetryczną (samosprzężoną), jeśli jako podalgebra funkcji ciągłych na $\mathfrak{M}(A)$ jest zamknięta na branie sprzężenia zespolonego. Bez odwoływania się bezpośrednio do przestrzeni ideałów maksymalnych można ten warunek zapisać następująco*

$$\forall_{x\in A}\exists_{x^*}\forall_{\varphi\in\mathfrak{M}(A)}\varphi(x^*)=\overline{\varphi(x)}.$$

Wprost z definicji każda $C^*$-algebra jest symetryczna (z twierdzenia Gelfanda-Najmarka jest izometrycznie izomorficzna z pewną algebrą funkcji ciągłych, która jest symetryczna). Bez trudu również można podać przykład algebry symetrycznej, która nie jest $C^*$-algebrą.

**Fakt 3.8.2.** *Algebra $L^1(\mathbb{T})$ jest symetryczna, ale nie jest $C^*$-algebrą.*

*Dowód.* Weźmy $f\in L^1(\mathbb{T})$ i określmy $f^*=\widetilde{f}$, gdzie $\widetilde{f}(t)=\overline{f(-t)}$. Wtedy dla każdego $n\in\mathbb{Z}$ mamy

$$\widehat{f^*}(n)=\overline{\widehat{f}(n)},$$

więc algebra $L^1(\mathbb{T})$ jest symetryczna. Aby przekonać się, że nie jest to $C^*$-algebra wystarczy zauważyć, że w przeciwnym razie (korzystamy z twierdzenia Gelfanda-Najmarka) odwzorowanie

$$T: L^1(\mathbb{T})\mapsto c_0(\mathbb{Z}) \text{ określone wzorem } T(f)=(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$$

byłoby "na". Dobrze znane są jednak przykłady ciągów zbieżnych do zera, które nie są ciągami współczynników Fouriera żadnej funkcji z $L^1(\mathbb{T})$. □

Aby przejść do badania algebry miar będziemy potrzebować poniższego lematu.

**Lemat 3.8.3.** *Jeśli $\mu,\nu\in M(\mathbb{T})$ spełniają $\mu\perp\nu$, to*

$$||\mu+\nu||_{M(\mathbb{T})}=||\mu||_{M(\mathbb{T})}+||\nu||_{M(\mathbb{T})}.$$

*Jeśli zaś $\mu,\nu\in M(\mathbb{T})$ spełniają $\mu,\nu\geqslant 0$, to*

$$||\mu*\nu||_{M(\mathbb{T})}=||\mu||_{M(\mathbb{T})}\cdot||\nu||_{M(\mathbb{T})}.$$

*Dowód.* Mamy oczywiście $||\mu+\nu||_{M(\mathbb{T})}\leqslant||\mu||_{M(\mathbb{T})}+||\nu||_{M(\mathbb{T})}$. Ustalmy $\varepsilon>0$ oraz funkcje $f,g\in C(\mathbb{T})$, $||f||_{C(\mathbb{T})}=||g||_{C(\mathbb{T})}=1$ spełniające $<\mu,f>\geqslant||\mu||_{M(\mathbb{T})}-\frac{\varepsilon}{2}$, $<\nu,g>\geqslant||\nu||_{M(\mathbb{T})}-\frac{\varepsilon}{2}$. Bez straty ogólności możemy zakładać, że nośnik funkcji $f$ jest zawarty w zbiorze, na którym skupiona jest miara $\mu$ i analogicznie, że nośnik $g$ jest zawarty w zbiorze, na którym skupiona jest miara $\nu$. W ten sposób dostajemy

$$||\mu+\nu||_{M(\mathbb{T})}\geqslant<\mu+\nu,f+g>=<\mu,f>+<\nu,g>\geqslant||\mu||_{M(\mathbb{T})}+||\nu||_{M(\mathbb{T})}-\varepsilon,$$

z dowolności $\varepsilon > 0$ dostajemy tezę.
Niech teraz $\mu, \nu \geqslant 0$. Korzystając z twierdzenia Fubiniego dostajemy (splot miar dodatnich jest miarą dodatnią).

$$||\mu * \nu||_{M(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} d\mu(x) d\nu(y) = \int_{\mathbb{T}} d\mu \cdot \int_{\mathbb{T}} d\nu = ||\mu||_{M(\mathbb{T})} \cdot ||\nu||_{M(\mathbb{T})},$$

co kończy dowód. □

Zanim przejdziemy do dowodu twierdzenia, iż algebra $M(\mathbb{T})$ nie jest symetryczna zauważmy, że dla $\mu \in M(\mathbb{T})$ określiliśmy miarę $\widetilde{\mu} \in M(\mathbb{T})$ wzorem $\widetilde{\mu}(E) = \overline{\mu(-E)}$. Wtedy dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ zachodzi

$$\widehat{\widetilde{\mu}}(n) = \overline{\widehat{\mu}(n)},$$

a więc algebra $M(\mathbb{T})$ jest symetryczna na części przestrzeni ideałów maksymalnych (dokładnie na $\mathbb{Z}$). Stąd oczywiście dostajemy, że gdyby $M(\mathbb{T})$ była symetryczna, to $\mu^* = \widetilde{\mu}$. Dowód asymetryczności naszej algebry będzie opierał się na poniższym twierdzeniu (symbolem $\check{\mu}$ będziemy oznaczać transformatę Gelfanda elementu $\mu$).

**Twierdzenie 3.8.4.** *Istnieje miara $\mu \in M(\mathbb{T})$ taka, że $\widehat{\mu}(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{R}$, ale $Im(\check{\mu}(M)) \neq 0$ dla pewnego $M \in \mathfrak{M}(M(\mathbb{T}))$ (to znaczy istnieje miara o rzeczywistych współczynnikach Fouriera-Stieltjesa, której transformata Gelfanda przyjmuje wartości nierzeczywiste).*

*Dowód.* Niech $\mu = R(\frac{1}{\ln k}, n_k)$ będzie produktem Riesza. Wiemy, że $\mu^n = R(2\frac{1}{\ln^n k 2^n}, n_k)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że dla każdych $m, n \in \mathbb{N}$ $(m \neq n)$ zachodzi

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\frac{1}{\ln^n k 2^n} - \frac{1}{\ln^m k 2^m}|^2 = \infty.$$

Zatem miary $(\mu^n)_{n\in\mathbb{N}}$ stanowią ciąg miar wzajemnie osobliwych (zobacz twierdzenie 3.7.14). Rozważmy miarę $\nu = e^{i\mu}$. Wtedy $\nu^n = e^{in\mu}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wykażemy, że

$$||\nu^n||_{M(\mathbb{T})} = e^n \text{ dla każdego } m \in \mathbb{N}.$$

Istotnie,

$$||\nu^n||_{M(\mathbb{T})} = \lim_{N\to\infty} ||\sum_{k=1}^{N} \frac{(in\mu)^k}{k!}||_{M(\mathbb{T})} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{(n||\mu||_{M(\mathbb{T})})^k}{k!} = e^{n||\mu||_{M(\mathbb{T})}} = e^n$$

W powyższym rachunku użyliśmy faktu, że $||\mu||_{M(\mathbb{T})} = 1$ oraz miary $(\mu^n)_{n\in\mathbb{N}}$ są wzajemnie singularne, dzięki czemu spełnione są założenia lematu.
Korzystając ze wzoru na promień spektralny dostajemy

$$\rho(\nu) = e.$$

Z definicji wiemy, że istnieje $\varphi \in \mathfrak{M}(M(\mathbb{T}))$ spełniające $\varphi(\nu) = e$. Oznacza to jednak, że

$$e = \varphi(\nu) = \varphi(e^{i\mu}) = e^{i\varphi(\mu)}.$$

Taka postać równania wymusza warunek $Im\varphi(\mu) = -1$. W ten sposób znaleźliśmy nierzeczywistą wartość transformaty Gelfanda i zakończyliśmy dowód. □

Możemy teraz sformułować użyteczny w dalszej części tego podrozdziału wniosek.

**Wniosek 3.8.5.** *$\mathbb{Z}$ nie jest gęsty w $\mathfrak{M}(M(\mathbb{T})$ (w topologii Gelfanda).*

*Dowód.* Zwróćmy uwagę, że ponieważ przestrzeń $M(\mathbb{T})$ jest nieośrodkowa, to topologia Gelfanda na $\mathfrak{M}(M(\mathbb{T}))$ nie jest metryzowalna, więc nie możemy stosować argumentów ciągowych. Moglibyśmy użyć ciągów uogólnionych, lecz bez trudu uda Nam się wykazać tezę wniosku za pomocą słabych* otoczeń. Niech $\mu \in M(\mathbb{T})$ oraz $\varphi \in \mathfrak{M}(M(\mathbb{T}))$ oznaczają odpowiednio miarę i funkcjonał liniowo-multiplikatywny używane w dowodzie twierdzenia. Rozważmy słabe* otoczenia $\varphi$ postaci

$$U(\varphi,\varepsilon;\mu) = \{\psi \in \mathfrak{M}(M(\mathbb{T})) : |\psi(\mu) - \varphi(\mu)| < \varepsilon\} \text{ dla } \varepsilon > 0.$$

Gdyby $\mathbb{Z}$ było gęste w $\mathfrak{M}(M(\mathbb{T}))$, to dla każdego $\varepsilon > 0$ znaleźlibyśmy takie $n \in \mathbb{N}$, że $|\widehat{\mu}(n) - \varphi(\mu)| < \varepsilon$. Zgodnie jednak z wcześniejszymi wynikami $Im\varphi = -1$, a wszystkie współczynniki Fouriera-Stieltjesa miary $\mu$ są rzeczywiste, co prowadzi do sprzeczności z założeniem o gęstości $\mathbb{Z}$ w $\mathfrak{M}(M(\mathbb{T}))$. □

Możemy teraz udowodnić, że algebra $M(\mathbb{T})$ nie jest symetryczna.

**Twierdzenie 3.8.6.** *Algebra $M(\mathbb{T})$ jest asymetryczna.*

*Dowód.* Ponownie, niech $\mu$ oznacza miarę z dowodu twierdzenia. Załóżmy, że istnieje $v \in M(\mathbb{T})$ takie, że $\check{\nu} = \overline{\check{\mu}}$. W szczególności, dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ zachodzi $\widehat{\nu}(n) = \overline{\widehat{\mu}(n)}$. Miara $\mu$ ma jednak rzeczywiste współczynniki Fouriera-Stieltjesa, co prowadzi do wniosku $\widehat{\nu}(n) = \widehat{\mu}(n)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Zatem $\nu = \mu$, a więc $\check{\nu} = \check{\mu}$. Jednak transformata Gelfanda miary $\mu$ przyjmuje również nierzeczywiste wartości, czyli $\check{\mu} \neq \overline{\check{\mu}}$, co przeczy założeniu i kończy dowód. □

W oparciu o komentarze poprzedzające definicję możemy podać następny wniosek.

**Wniosek 3.8.7.** *Algebra $M(\mathbb{T})$ nie jest $C^*$ algebrą.*

W teorii algebr Banacha rozważa się ważną klasę tzw. algebr regularnych. Nie będziemy się zagadnieniami tego typu zbyt wiele zajmować, lecz dzięki twierdzeniu wykażemy bez trudu, że algebra $M(\mathbb{T})$ nie jest regularna. Wprowadźmy definicję.

**Definicja 3.8.8.** *Algebrę Banacha $A$ nazywamy regularną, gdy dla każdego zbioru zwartego $K \subset \mathfrak{M}(A)$ oraz punktu $p \in \mathfrak{M}(A)$, $p \notin K$ istnieje $x \in A$ takie, że*

$$\check{x}(p) = 1 \textit{ oraz } \check{x}(u) = 0 \textit{ dla każdego } u \in K.$$

Widzimy, że definicja algebry regularnej przypomina bardzo definicję przestrzeni topologicznej regularnej.
Bez trudu można sprawdzić, że każda $C^*$-algebra jest regularna (jest nawet normalna jako izometrycznie izomorficzna z przestrzenią funkcji ciągłych na zbiorze zwartym - wystarczy zastosować lemat Urysohna). Łatwo także uzasadnić, że algebra $L^1(\mathbb{T})$ jest regularna (zbiory zwarte w przestrzeni ideałów maksymalnych to zbiory skończone, więc możemy otrzymać żądaną własność oddzielania za pomocą wielomianów trygonometrycznych). Wykażemy teraz, że algebra $M(\mathbb{T})$ nie jest regularna.

**Twierdzenie 3.8.9.** *Algebra $M(\mathbb{T})$ nie jest regularna.*

*Dowód.* Wiemy, że $\mathbb{Z}$ nie jest gęste w $\mathfrak{M}(M(\mathbb{T}))$. Weźmy więc $M \in \mathfrak{M}(M(\mathbb{T}))$ nie należące do domknięcia $\mathbb{Z}$ (w topologii Gelfanda). Jeśli $\mu \in M(\mathbb{T})$ spełnia $\check{\mu}(n) = \widehat{\mu}(n) = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to $\mu \equiv 0$, więc domknięcia $\mathbb{Z}$, które jest zwarte jako domknięty podzbiór przestrzeni zwartej, nie można oddzielić za pomocą transformaty Gelfanda żadnego elementu od punktu $M$. □

Przedstawimy teraz krótko bardziej znany dowód asymetryczności algebry $M(\mathbb{T})$, którego niektóre fragmenty zostaną użyte w następnym podrozdziale. Będziemy potrzebować kilku definicji.

**Definicja 3.8.10.** *Zbiór $E \subset \mathbb{T}$ nazywamy niezależnym, jeśli dla dowolnych $x_1, \dots, x_k \in E$ oraz liczb całkowitych $n_1, \dots, n_k$ zachodzi tylko jeden z warunków*

- $n_1x_1 = n_2x_2 = \ldots = n_kx_k = 0.$
- $n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_kx_k \neq 0.$

*Innymi słowy, żadna kombinacja liniowa występująca w warunku 2 nie może być zerowa, chyba że wszystkie jej składniki są zerowe.*
*Zbiór $E \subset \mathbb{T}$ będziemy nazywać zbiorem Kroneckera, jeśli dla każdej funkcji ciągłej określonej na $E$ o module 1 i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $n \in \mathbb{Z}$ takie, że*

$$\sup_{x \in E} |f(x) - \chi^n(x)| < \varepsilon.$$

Definicja zbioru Kroneckera nawiązuje do klasycznego twierdzenia Kroneckera, które w tej terminologii można wysłowić następująco: każdy skończony i niezależny podzbiór $\mathbb{T}$ jest zbiorem Kroneckera. Zachodzi również poniższy fakt.

**Fakt 3.8.11.** *Zbiory Kroneckera są niezależne i nie zawierają elementów skończonego rzędu.*

Ważną rolę odegrają zbiory typu Cantora.

**Definicja 3.8.12.** *Zbiór $E \subset \mathbb{T}$ będziemy nazywać zbiorem Cantora, jeśli jest homeomorficzny ze standardowym zbiorem Cantora, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy jest niepustym, całkowicie niespójnym zbiorem doskonałym.*

Z konstrukcji zbioru Cantora łatwo dostajemy poniższą uwagę.

**Uwaga 3.8.13.** *Na każdym zbiorze Cantora istnieje dodatnia miara ciągła o normie* 1.

Zachodzi ważne twierdzenie.

**Twierdzenie 3.8.14.** *Istnieje zbiór Cantora, który jest jednocześnie zbiorem Kroneckera.*

Otrzymujemy teraz wniosek (zobacz też fakt 3.8.11).

**Wniosek 3.8.15.** *W grupie $\mathbb{T}$ istnieje niezależny zbiór Cantora.*

Miary na zbiorach niezależnych mają pewne patologiczne własności, które pozwolą Nam podać inny dowód asymetrii algebry $M(\mathbb{T})$. Potrzebujemy najpierw twierdzenia pomocniczego.

**Twierdzenie 3.8.16.** *Niech $P$ będzie niezależnym zbiorem zwartym oraz niech $Q = P \cup (-P)$. Jeśli $\mu \in M(\mathbb{T})$ jest miarą ciągłą skupioną na $Q$, to miary $\delta, \mu, \mu^2, \ldots$ są wzajemnie osobliwe.*

Z pomocą powyższego wykażemy teraz asymetrię algebry $M(\mathbb{T})$ oraz (po raz kolejny) rozwiążemy negatywnie problem odwrotności.

**Twierdzenie 3.8.17.** *Zachodzą dwa fakty.*

1. *$M(\mathbb{T})$ nie jest algebrą symetryczną.*

*2. Istnieje ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in B(\mathbb{Z})$ taki, że $a_n \geqslant 1$ dla wszystkich $n \in \mathbb{Z}$, ale $\frac{1}{a_n} \notin B(\mathbb{Z})$.*

*Dowód.* Z wniosku 3.8.15 istnieje w $\mathbb{T}$ niezależny zbiór Cantora $P$ oraz nieujemna miara ciągła (zobacz uwagę 3.8.13) $\mu_1$ skupiona na $P$ spełniająca $||\mu_1||_{M(\mathbb{T})} = 1$. Rozważmy miarę $\mu = \frac{1}{2}(\mu_1 + \widetilde{\mu_1})$. Wtedy $\mu = \widetilde{\mu}$ oraz $\mu$ jest skupiona na $Q = P \cup (-P)$, $\mu \geqslant 1$ oraz $\mu$ jest miarą ciągłą. Określmy teraz $\nu = \delta - \mu^2$. Korzystając z twierdznia 3.8.16 dostajemy

$$||\nu^n||_{M(\mathbb{T})} = ||\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \mu^{2k}||_{M(\mathbb{T})} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Ze wzoru na promień spektralny uzyskujemy $\rho(\nu) = 2$. Istnieje zatem funkcjonał liniowo-multiplikatywny $\varphi$ na $M(\mathbb{T})$ taki, że $|\varphi(\nu)| = 2$. Skoro $||\mu||_{M(\mathbb{T})} = 1$, to $|\varphi(\mu^2)| \leqslant 1$, a więc równanie $|1 - \varphi(\mu^2)| = |\varphi(\nu)| = 2$ może być spełnione tylko, gdy $\varphi(\mu^2) = -1$ oraz $\varphi(\nu) = 2$. Z drugiej strony $\varphi(\mu^2) = \varphi(\mu)^2$, więc $\varphi(\mu) = \pm i$. Z założenia jednak $\mu = \widetilde{\mu}$, więc $\varphi(\widetilde{\mu}) = \varphi(\mu)$. Zatem $\varphi(\widetilde{\mu}) \neq \overline{\varphi(\mu)}$, co dowodzi, że algebra $M(\mathbb{T})$ jest niesymetryczna.
Aby udowodnić część 2 przyjmijmy $\lambda = \delta + \mu^2$. Skoro $\widetilde{\mu} = \mu$ miara $\mu$ ma rzeczywiste współczynniki Fouriera-Stieltjesa, a stąd $-1 \leqslant \widehat{\mu}(n) \leqslant 1$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$. Stąd $1 \leqslant \widetilde{\lambda}(n) \leqslant 2$ dla $n \in \mathbb{Z}$. Ale $\varphi(\lambda) = 1 + \varphi(\mu^2) = 0$, więc $\lambda$ nie jest elementem odwracalnym w $M(\mathbb{T})$, co kończy dowód. □

**Komentarze i odniesienia do literatury.** Dowód asymetrii i nieregularności algebry $M(\mathbb{T})$ za pomocą produktów Riesza można znaleźć w książce [Graham,McGehee]. Ja jednak zaadaptowałem ten znajdujący się w książce [Katznelson]. Drugie podejście (używające miar na zbiorach cienkich) jest świetnie opisane w [Rudin3].

## 3.9. Powrót do naturalności w algebrze $M(\mathbb{T})$

W poprzednich kilku rozdziałach zbadaliśmy problem naturalności spektrum w algebrze $M_0(\mathbb{T})$. Przechodzimy teraz do trudniejszego przypadku ogólnego. Okaże się, że niestety zarówno własności zbioru miar o naturalnym spektrum jak i bogactwo przykładów jest w algebrze $M(\mathbb{T})$ dużo mniej zadowalające.
Wprowadźmy definicję.

**Definicja 3.9.1.** *Przez $\mathscr{N}$ będziemy oznaczać zbiór miar o naturalnym spektrum w algebrze $M(\mathbb{T})$, to znaczy*

$$\mathscr{N} = \{\mu \in M(\mathbb{T}) : \sigma(\mu) = \overline{F_\mu} = \overline{\widehat{\mu}(\mathbb{Z})}\}.$$

Z definicji mamy $\mathscr{C} \subset \mathscr{N}$. Odpowiedzmy najpierw na pytanie, czy zbiór $\mathscr{N}$ jest ideałem w algebrze $M(\mathbb{T})$.

**Fakt 3.9.2.** *$\mathscr{N}$ nie jest ideałem w algebrze $M(\mathbb{T})$.*

*Dowód.* Oczywiście $\delta \in \mathscr{N}$. Z drugiej strony, udowodniliśmy wcześniej, że produkt Riesza $R = R(1, 3^k) \notin \mathscr{N}$. To oczywiście przeczy definicji ideału, gdyż $R * \delta = R$. □

Powyższy fakt nie dowodzi jednak wcale, że zbiór $\mathscr{N}$ nie jest zamknięty na dodawanie. Niestety, ta własność także nie zachodzi dla zbioru $\mathscr{N}$. Aby to wykazać będziemy potrzebować dodatkowego lematu, którego dowodu nie zamieszczamy.

**Lemat 3.9.3.** *Niech $P$ będzie zwartym zbiorem Kroneckera w $\mathbb{T}$. Jeśli $\mu \in M_c(\mathbb{T})$ jest miarą skupiona na $P$, to $\overline{\widehat{\mu}(\mathbb{Z})} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant ||\mu||_{M(\mathbb{T})}\}$.*

Możemy teraz przejść do głównego twierdzenia, którego uzasadnienie będzie składało się z prostych obserwacji poczynionych przy okazji dowodu twierdzenia 3.8.17.

**Twierdzenie 3.9.4.** *Istnieją miary $\mu, \nu \in M(\mathbb{T})$ takie, że $\sigma(\mu) = \overline{\widehat{\mu}(\mathbb{Z})}$, $\sigma(\nu) = \overline{\widehat{\nu}(\mathbb{Z})}$, ale $\overline{\widehat{\mu+\nu}(\mathbb{Z})}$ jest właściwym podzbiorem $\sigma(\mu+\nu)$, czyli zbiór $\mathscr{N}$ nie jest zamknięty na dodawanie.*

*Dowód.* Niech $\mu_1$ będzie dodatnią miarą ciągłą skupioną na zbiorze Kroneckera, który jest jednocześnie zbiorem Cantora o własności $||\mu_1||_{M(\mathbb{T})} = 1$. Zgodnie z lematem poprzedzającym twierdzenie mamy $\overline{\widehat{\mu_1}(\mathbb{Z})} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$, stąd oczywiście $\mu_1 \in \mathscr{N}$. Tak samo otrzymujemy $\widetilde{\mu_1} \in \mathscr{N}$. Wykazaliśmy jednak wcześniej, że dla miary $\mu = \frac{1}{2}(\mu_1 + \widetilde{\mu_1})$ o rzeczywistych współczynnikach istnieje $\varphi \in \mathfrak{M}(M(\mathbb{T}))$ takie, że $\varphi(\mu) = \pm i$, czyli $\varphi(2\mu) = 2\varphi(\mu) = \pm 2i$. Zatem $2\mu = \mu_1 + \widetilde{\mu_1} \notin \mathscr{N}$, co kończy dowód twierdzenia. □

Ostatnią ważną własność, którą należy sprawdzić jest domkniętość. W tym przypadku wynik jest pozytywny.

**Stwierdzenie 3.9.5.** *Zbiór $\mathscr{N}$ miar o naturalnym spektrum jest domknięty.*

*Dowód.* Weźmy ciąg $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{N}$ taki, że $||\mu_n - \mu||_{M(\mathbb{T})} \to 0$ przy $n \to \infty$ dla pewnego $\mu \in M(\mathbb{T})$. Mamy pokazać, że $\mu \in \mathscr{N}$. Weźmy dowolny funkcjonał liniowo-multiplikatywny $\varphi \in \mathfrak{M}(M(\mathbb{T}))$. Nasze zadanie będzie rozwiązane, gdy pokażemy, że wartość $\varphi(\mu)$ możemy z dowolną dokładnością przybliżyć współczynnikami Fouriera-Stieltjesa miary $\mu$. Skoro miary $\mu_n$ mają naturalne spektrum, to dobierzemy ciąg liczb naturalnych $k_n$ taki, że

$$|\varphi(\mu_n) - \widehat{\mu_n}(k_n)| < \frac{1}{n}.$$

Korzystając ze zbieżności oraz faktu, że każdy funkcjonał liniowo-multiplikatywny ma normę 1 otrzymujemy

$$\begin{aligned}&|\varphi(\mu) - \widehat{\mu}(k_n)| \leqslant |\varphi(\mu) - \varphi(\mu_n)| + |\varphi(\mu_n) - \widehat{\mu_n}(k_n)| + |\widehat{\mu_n}(k_n) - \widehat{\mu}(k_n)| \leqslant \\ &||\mu - \mu_n||_{M(\mathbb{T})} + \frac{1}{n} + ||\mu - \mu_n||_{M(\mathbb{T})} \to 0 \text{ przy } n \to \infty,\end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Zastanówmy się teraz, co odpowiada za ten fenomen. W szczególności, być może przy pewnych dodatkowych założeniach z naturalności spektrum składników można wnioskować o naturalności spektrum sumy.

**Fakt 3.9.6.** *Niech $\mu \in \mathscr{C}$. Jeśli miara $\nu \in \mathscr{N}$ spełnia*

$$\varphi(\nu) \in \overline{\widehat{\nu}(\mathbb{Z})} \setminus \widehat{\nu}(\mathbb{Z}) \text{ dla każdego } \varphi \in \mathfrak{M}(M(\mathbb{T})) \setminus \mathbb{Z},$$

*to $\mu + \nu \in \mathscr{N}$.*

*Dowód.* Spektrum elementu jest obrazem transformaty Gelfanda wyznaczonej przez ten element, więc

$$\begin{aligned}&\sigma(\mu + \nu) = \{\varphi(\mu + \nu) : \varphi \in \mathfrak{M}(M(\mathbb{T}))\} = (\widehat{\mu + \nu})(\mathbb{Z}) \cup \{\varphi(\mu + \nu) : \varphi \in \mathfrak{M}(M(\mathbb{T})) \setminus \mathbb{Z}\} = \\ &(\widehat{\mu + \nu})(\mathbb{Z}) \cup \{\varphi(\nu) : \varphi \in \mathfrak{M}(M(\mathbb{T})) \setminus \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Z naturalności spektrum miary $\nu$ oraz założenia widzimy, że

$$\{\varphi(\nu) : \varphi \in \mathfrak{M}(M(\mathbb{T}))\} = \overline{\widehat{\nu}(\mathbb{Z})} \setminus \widehat{\nu}(\mathbb{Z}).$$

Zatem
$$\sigma(\mu+\nu) = \widehat{(\mu+\nu)}(\mathbb{Z}) \cup (\overline{\widehat{\nu}(\mathbb{Z})} \setminus \widehat{\nu}(\mathbb{Z})).$$

Aby wykazać naturalność spektrum miary $\mu+\nu$ wystarczy uzasadnić, że $\sigma(\mu+\nu) \subset \overline{\widehat{(\mu+\nu)}(\mathbb{Z})}$. Zawieranie $\widehat{(\mu+\nu)}(\mathbb{Z}) \subset \overline{\widehat{(\mu+\nu)}(\mathbb{Z})}$ jest oczywiste, weźmy więc $z \in \overline{\widehat{\nu}(\mathbb{Z})} \setminus \widehat{\nu}(\mathbb{Z})$. Wtedy istnieje ciąg $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ taki, że
$$\lim_{k\to\infty} \widehat{\nu}(n_k) = z.$$
Z przyjętych ograniczeń wynika także, iż $n_k \to \infty$ przy $k \to \infty$. Teraz niech $z_k = \widehat{\mu}(n_k) + \widehat{\nu}(n_k) \in \widehat{(\mu+\nu)}(\mathbb{Z})$. Przy tak przyjętych oznaczeniach mamy
$$\lim_{k\to\infty} z_k = 0 + z = z,$$
co kończy dowód. □

Pojawia się pytanie, czy warunek występujący w fakcie jest również warunkiem koniecznym. Okazuje się, że nie.

**Uwaga 3.9.7.** *Niech $\lambda$ oznacza unormowaną miarę Lebesgue'a na okręgu oraz $\delta_a$ będzie deltą Diraca w punkcie nieskończonego rzędu w grupie $\mathbb{T}$. Wtedy $\lambda + \delta_a \in \mathscr{N}$, choć istnieje $\varphi \in \mathfrak{M}(M(\mathbb{T})) \setminus \mathbb{Z}$ taki, że $\varphi(\delta_a) = \widehat{\delta_a}(0) = 1$.*

*Dowód.* Oczywiście $\widehat{(\lambda+\delta_a)}(\mathbb{Z}) = \widehat{\delta_a}(\mathbb{Z}\setminus\{0\}) \cup \{2\}$. Ponadto zbiór $\widehat{\delta_a}(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ jest gęsty w okręgu (powstaje przez wyjęcie jednego punktu z przeliczalnego zbioru gęstego), więc $\overline{\widehat{(\lambda+\delta_a)}(\mathbb{Z})} = \{z \in \mathbb{Z} : |z| = 1\} \cup \{2\}$. Z drugiej strony
$$\sigma(\lambda+\delta_a) = \{\varphi(\lambda+\delta_a) : \mathfrak{M}(M(\mathbb{T}))\} = \{2\} \cup \{\varphi(\delta_a) : \mathfrak{M}(M(\mathbb{T}))\setminus\{0\}\} \subset \{2\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$
Zatem $\lambda + \delta_a \in \mathscr{N}$. Wykazaliśmy w szczególności, iż $1 \in \sigma(\lambda+\delta_a)$. Ale $1 \notin \widehat{(\lambda+\delta_a)}$, czyli istnieje $\varphi \in \mathfrak{M}(M(\mathbb{T})) \setminus \mathbb{Z}$ spełniające $\varphi(\delta_a) = 1 = \widehat{\delta_a}(0)$. □

Kluczem do sukcesu w powyższej uwadze była doskonałość zbioru $\overline{\widehat{\delta_a}(\mathbb{Z})}$. Sformułujmy więc następny fakt.

**Fakt 3.9.8.** *Jeśli $\mu \in \mathscr{C}$ oraz $\nu \in \mathscr{N}$ jest takie, że $\sigma(\nu)$ jest zbiorem doskonałym (to znaczy spektrum nie zawiera punktów izolowanych), to $\mu + \nu \in \mathscr{N}$.*

*Dowód.* Wykonując proste przekształcenia dostajemy
$$\sigma(\mu+\nu) \subset \widehat{(\mu+\nu)}(\mathbb{Z}) \cup \overline{\widehat{\nu}(\mathbb{Z})}.$$
Weźmy $z \in \widehat{\nu}(\mathbb{Z})$ (przypadek $z \in \overline{\widehat{\nu}(\mathbb{Z})} \setminus \widehat{\nu}(\mathbb{Z})$ został już rozpatrzony w dowodzie poprzedniego faktu). Z założenia $z$ nie jest punktem izolowanym, więc istnieje ciąg $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \widehat{\nu}(\mathbb{Z}) \setminus \{z\}$ spełniający
$$\lim_{k\to\infty} z_k = z.$$
Niech więc $z_k = \widehat{\nu}(n_k)$ dla pewnego ciągu $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ liczb naturalnych takiego, że $n_k \to \infty$ przy $k \to \infty$. Wtedy
$$\lim_{k\to\infty} \widehat{\mu}(n_k) + \widehat{\nu}(n_k) = 0 + z = z.$$
Stąd $z \in \overline{\widehat{\mu+\nu}(\mathbb{Z})}$, co prowadzi do inkluzji $\sigma(\mu+\nu) \subset \overline{\widehat{\mu+\nu}(\mathbb{Z})}$ i kończy dowód. □

Osiągnięte wyniki są dalekie od optymalnych. Główne twierdzenie tego podrozdziału będzie od Nas wymagało ciekawszego pomysłu.

**Twierdzenie 3.9.9.** *Jeśli $\mu \in \mathscr{C}$ oraz $\nu \in \mathscr{N}$, to $\mu + \nu \in \mathscr{N}$.*

*Dowód.* Podobnie jak poprzednio możemy napisać

$$\sigma(\mu+\nu) = \widehat{(\mu+\nu)}(\mathbb{Z}) \cup \{\varphi(\nu) \in \mathfrak{M}(M(\mathbb{T})) \setminus \mathbb{Z}\}.$$

Z naturalności spektrum miary $\nu$ wiemy, że dla każdego $\varphi \in \mathfrak{M}(M(\mathbb{T}))$ zachodzi $\varphi(\nu) \in \overline{\widehat{\nu}(\mathbb{Z})}$. Jeśli $\varphi(\nu) \in \overline{\widehat{\nu}(\mathbb{Z})} \setminus \widehat{\nu}(\mathbb{Z})$, to jesteśmy w sytuacji poprzedniego faktu. Załóżmy więc, że istnieje $\varphi \in \mathfrak{M}(M(\mathbb{T}))$ takie, że $\varphi(\nu) = \widehat{\nu}(n)$ dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$. Gdy $\widehat{\mu}(n) = 0$, to nie ma czego dowodzić, gdyż wtedy $\widehat{\nu}(n) = \widehat{\mu}(n) + \widehat{\nu}(n) \in \widehat{(\mu+\nu)}(\mathbb{Z})$, dlatego ograniczymy się do takich miar $\mu \in \mathscr{C}$, które spełniają $\widehat{\mu}(n) \neq 0$. Dalej, jeśli $\widehat{\nu}(n)$ nie jest punktem izolowanym $\sigma(\nu)$, to ponownie otrzymujemy przypadek, którym już się zajmowaliśmy. Bez straty ogólności możemy więc przyjąć, że $\widehat{\nu}$ jest punktem izolowanym $\overline{\widehat{\nu}(\mathbb{Z})}$, a stąd jest również punktem izolowanym $\widehat{(\mu+\nu)}(\mathbb{Z})$. Uzasadnimy teraz, że punkt $\widehat{\nu}(n)$ jest także punktem izolowanym $\sigma(\mu+\nu)$. Załóżmy przeciwnie, to znaczy istnieje ciąg $\lambda_k \in \sigma(\mu+\nu)$ taki, że $\lambda_k \to \widehat{\nu}(n)$ przy $k \to \infty$. Spektrum jest obrazem transformaty Gelfanda, więc dobierzemy ciąg $(h_m)_{m\in\mathbb{N}} \neq \varphi$ taki, że $h_k(\mu+\nu) = \lambda_k$. Dla dostatecznie dużych $k$ funkcjonały $h_k$ muszą być różne od brania współczynników Fouriera-Stieltjesa (w przeciwnym wypadku mielibyśmy $\widehat{\nu}(n) \in \overline{\widehat{\mu+\nu}(\mathbb{Z})}$). Stąd

$$\lim_{k\to\infty} h_k(\mu+\nu) = \lim_{k\to\infty} h_k(\nu) = \widehat{\nu}(n),$$

ale $h_k(\nu) \in \sigma(\nu) = \overline{\widehat{\nu}(\mathbb{Z})}$, czyli $\widehat{\nu}(n)$ nie jest punktem izolowanym $\overline{\widehat{\nu}(\mathbb{Z})}$, co przeczy wcześniejszym założeniom.

Znajdziemy zatem dwa zbiory otwarte $A$ i $B$ takie, że $A \cap B = \emptyset$, $\sigma(\mu+\nu) \subset A \cup B$ oraz $\widehat{\nu}(n) \in B$. Niech $f$ będzie funkcją holomorficzną na $A \cup B$ określoną jako $f(z) = z$ dla $z \in A$ oraz $f \equiv c$ na zbiorze $B$ dla pewnej stałej $c \in \mathbb{C}$. Z twierdzenia o rachunku funkcyjnym istnieje miara $f(\mu+\nu) \in M(\mathbb{T})$ spełniająca

$$\widehat{f(\mu+\nu)}(m) = f(\widehat{(\mu+\nu)}(m)) \text{ dla wszystkich } m \in \mathbb{Z}.$$

Z definicji funkcji $f$ mamy jednak $\widehat{f(\mu+\nu)}(m) = \widehat{(\mu+\nu)}(m)$ dla $m \neq n$. Ponadto, $\widehat{\mu}(n) + \widehat{\nu}(n) \neq \widehat{\nu}(n)$, a więc mamy również

$$\widehat{f(\mu+\nu)}(n) = \widehat{(\mu+\nu)}(n).$$

Uzyskaliśmy równość wszystkich współczynników Fouriera-Stieltjesa miar $\mu+\nu$ oraz $f(\mu+\nu)$, czyli $\mu+\nu = f(\mu+\nu)$. Zadziałajmy teraz na ostatniej równości funkcjonałem liniowo-multiplikatywnym $\varphi$. Otrzymujemy

$$\varphi(\mu+\nu) = \varphi(\nu) = \widehat{\nu}(n).$$

Z drugiej strony,

$$\varphi(f(\mu+\nu)) = f(\varphi(\mu+\nu)) = f(\varphi(\nu)) = f(\widehat{\nu}(n)) = c.$$

Stąd musiałaby zachodzić równość $\widehat{\nu}(n) = c$. Jednak stała $c$ była dowolna, co prowadzi do sprzeczności dowodzącej słuszności twierdzenia. $\square$

Można wykazać, że każda miara dyskretna ma naturalne spektrum.

**Twierdzenie 3.9.10.** *Jeśli* $\mu \in M_d(\mathbb{T})$*, to* $\mu \in \mathscr{N}$*.*

Dość technicznego i zawiłego dowodu tego twierdzenia nie będziemy tutaj przedstawiać. Wyciągniemy jednak na koniec pewien wniosek.

**Wniosek 3.9.11.** *Zachodzi następująca inkluzja*

$$\mathscr{C} \oplus M_d(\mathbb{T}) \subset \mathscr{N}.$$

**Komentarze i odniesienia do literatury.** Dowód, iż zbiór $\mathscr{N}$ nie jest zamknięty na dodawanie pochodzi z pracy [Zafran] (przy istotnym wykorzystaniu wyników z [Rudin3]). Pozostałe fakty i twierdzenia przedstawione w tym podrozdziale nie były (według mojej wiedzy) wcześniej publikowane.

## 3.10. Przestrzeń ideałów maksymalnych algebry $M(\mathbb{T})$

Większość fenomenów, którymi się zajmujemy, ma źródło w skomplikowaniu przestrzeni ideałów maksymalnych algebry $M(\mathbb{T})$. Zbierzemy teraz naszą wiedzę w tym zakresie i wyciągniemy pewne wnioski.
Na początek przypomnimy krótko niektóre rezultaty.

**Fakt 3.10.1.** *Niech* $\mu \in M(\mathbb{T})$*. Jeśli dla każdego* $n \in \mathbb{Z}$ *zachodzi* $\widehat{\mu}(n) = 0$*, to* $\mu \equiv 0$*.*

W związku z powyższym faktem bardzo zaskakujący jest poniższy rezultat.

**Twierdzenie 3.10.2.** $\mathbb{Z}$ *nie jest gęste w* $\mathfrak{M}(M(\mathbb{T}))$*.*

Możemy także łatwo zidentyfikować olbrzymią rodzinę funkcjonałów liniowo-multiplikatywnych na $M(\mathbb{T})$.

**Fakt 3.10.3.** *Zachodzi inkluzja* $\beta\mathbb{Z} \subset \mathfrak{M}(M(\mathbb{T}))$*.*

*Dowód.* Rzeczywiście, weźmy dowolne $\varphi \in \mathfrak{M}(l^\infty(\mathbb{Z}))$. Określmy jego działanie na dowolnej mierze $\mu \in M(\mathbb{T})$ wzorem

$$\varphi(\mu) = \varphi((\widehat{\mu}(n))_{n\in\mathbb{Z}}).$$

Ciągłość wynika łatwo z oszacowania

$$|\varphi(\mu)| \leqslant ||(\widehat{\mu}(n))_{n\in\mathbb{Z}}||_{l^\infty(\mathbb{Z})} \leqslant ||\mu||_{M(\mathbb{T})}.$$

Wiemy jednak, że funkcjonały liniowo-multiplikatywne są we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości z ultrafiltrami na $\mathbb{Z}$, co kończy dowód. □

Uzasadnimy teraz, że całe rozszerzenie Cecha-Stone'a liczb całkowitych jest właściwą częścią $\mathfrak{M}(M(\mathbb{T}))$.

**Fakt 3.10.4.** $\beta\mathbb{Z}$ *jest właściwym podzbiorem* $\mathfrak{M}(M(\mathbb{T}))$*.*

*Dowód.* Załóżmy przeciwnie, to znaczy $\mathfrak{M}(M(\mathbb{T})) = \beta\mathbb{Z}$. Wtedy jednak zachodziłoby $\sigma(\mu) = \overline{\widehat{\mu}(\mathbb{Z})}$ (działanie wszystkimi ultrafiltrami na ustalonym ciągu powoduje jego domknięcie) dla każdego $\mu \in M(\mathbb{T})$. Znaczyłoby to, że każda miara ma naturalne spektrum. Tak jednak nie jest, o czym przekonaliśmy się wielokrotnie. □

Z powyższego rozumowania można wywnioskować, że zagadnienie naturalności spektrum jest silnie związany ze strukturą przestrzeni $\mathfrak{M}(M(\mathbb{T}))$. Tak samo jak brak gęstości $\mathbb{Z}$ w $\mathfrak{M}(M(\mathbb{T}))$ wykażemy ostatni fakt.

**Fakt 3.10.5.** *$\beta\mathbb{Z}$ nie jest gęste w $\mathfrak{M}(M(\mathbb{T}))$.*

Przypomnijmy na koniec słynny problem.

**Problem 4.** *Jaka jest przestrzeń ideałów maksymalnych algebry $M(\mathbb{T})$?*

Nikt nie potrafi odpowiedzieć na to pytanie, lecz z pewną dozą prawdopodobieństwa nasze badania nad naturalnością spektrum pomogą sformułować nowe fakty związane z tym problemem.

**Komentarze i odniesienia do literatury.** Fakty przedstawione w tym podrozdziale są powszechnie znane. Elementarne własności przestrzeni $\mathfrak{M}(M(\mathbb{T}))$ są zaprezentowane w przystępny sposób w książce [Hartman]. Wiele specjalistycznych informacji można znaleźć w książce [Graham,McGehee].

## 3.11. Rozwiązanie osłabionego problemu Wienera-Pitta

Udowodnimy teraz nasz główny rezultat. Skonstruujemy ciąg liczb zespolonych o tej własności, że jeśli wszystkie współczynniki Fouriera-Stieltjesa miary $\mu \in M_0(\mathbb{T})$ są elementami tego ciągu, to miara ta ma naturalne spektrum. Jest to pozytywne rozwiązanie osłabionego problemu Wienera-Pitta.
Będziemy potrzebować dwóch słynnych twierdzeń. Oto pierwsze z nich.

**Twierdzenie 3.11.1** (McGehee,Pigno,Smith)**.** *Dla dowolnego wielomianu trygonometrycznego $f$ postaci*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{i n_k t},$$

*gdzie $n_k$ są różnymi liczbami całkowitymi oraz $|c_k| \geqslant 1$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ zachodzi*

$$|| \sum_{k=1}^{N} e^{i n_k t} ||_{L^1(\mathbb{T})} > K \ln N,$$

*przy czym stała $K > 0$ jest niezależna od $N$.*

Jest to rozwiązanie słynnej (i bardzo starej) hipotezy Littlewooda. Do tego rezultatu będziemy się odnosić jako do "twierdzenia trzech autorów".
Drugie twierdzenie potrzebne do naszej konstrukcji jest następujące.

**Twierdzenie 3.11.2** (Bożejko,Pełczyński,Bourgain)**.** *Niech $\Lambda \subset \mathbb{N}$ będzie zbiorem mocy $k$. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje wielomian trygonometryczny $f$ taki, że*

1. *$\widehat{f}(n) = 1$ dla $n \in \Lambda$.*
2. *$||f||_{L^1(\mathbb{T})} \leqslant 1 + \varepsilon$.*
3. *$\#\{n \in \mathbb{N} : \widehat{f}(n) \neq 0\} \leqslant \left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^{2k}$,*

*dla pewnej stałej $c > 0$.*

Wielomian, którego istnienie jest postulowane w powyższym twierdzeniu będziemy nazywać wielomianem BPB.
Dla wygody wprowadzimy kilka definicji.

**Definicja 3.11.3.** *Dla $\varepsilon > 0$ będziemy pisać $\nu \in F(\varepsilon)$ dla $\nu \in M(\mathbb{T})$, jeśli dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ zachodzi $|\widehat{\nu}(k)| < \varepsilon$.*
*Przez $E_0$ będziemy oznaczać zbiór idempotentnych wielomianów trygonometrycznych, to znaczy wielomianów trygonometrycznych o współczynnikach $0$ i $1$.*
*Dla $\mu \in M(\mathbb{T})$ wprowadzamy oznaczenie*

$$\#\mu = \#supp\widehat{\nu} = \#\{n \in \mathbb{Z} : \widehat{\mu}(n) \neq 0\}.$$

Udowodnimy najpierw prosty fakt pomocniczy.

**Fakt 3.11.4.** *Niech $\mu \in M(\mathbb{T})$. Jeśli $\#\mu > d$ dla pewnej liczby naturalnej $d$, to istnieje ciąg okresowy $\Gamma$ składający się jedynie z zer i jedynek mający postać blokową, to znaczy będący postaci $10\ldots010\ldots010\ldots$, gdzie liczba zer pomiędzy jedynkami jest stała (taki ciąg będziemy nazywać postępem arytmetycznym), o własności*

$$d < \#\left(supp\widehat{\mu} \cap \Gamma\right) < 2d.$$

*Dowód.* Jeśli od początku spełniona jest nierówność $d < \#\mu < 2d$, to za $\Gamma$ weźmiemy ciąg stały równy 1. W przeciwnym razie zachodzi $\#\mu > 2d$. Określmy $\Gamma_1$ jako postęp arytmetyczny z jedynkami na współrzędnych parzystych (na nieparzystych zera), zaś $\Gamma_2$ jako postęp arytmetyczny z jedynkami na współrzędnych nieparzystych. Zatem dla jednego z postępów $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ zachodzi $d < \#\left(supp\widehat{\mu} \cap \Gamma_i\right)$ $i = 1$ lub $i = 2$. Jeśli zachodzi również nierówność $\#\left(supp\widehat{\mu} \cap \Gamma_i\right) < 2d$, to znaleźliśmy odpowiedni postęp arytmetyczny. W przeciwnym razie będziemy indukcyjnie naszą procedurę kontynuować, aż otrzymamy stosowne $\Gamma$. □

Udowodnimy teraz pierwszy lemat.

**Lemat 3.11.5.** *Istnieje funkcja $\varepsilon = \varepsilon(K, |a|)$ oraz stała $c > 0$ taka, że jeżeli $||a\mu + \nu||_{M(\mathbb{T})} < K$ dla pewnych $\mu \in E_0$ oraz $\nu \in F(\varepsilon)$, to $\#\mu < \exp(c\frac{K}{|a|})$.*

*Dowód.* Załóżmy, że $\#\mu > d$ dla pewnej liczby naturalnej $d$ (zajmiemy się później). Z faktu 3.11.4 istnieje taki postęp arytmetyczny $\Gamma$, że

$$d < \#\left(supp\widehat{\mu} \cap \Gamma\right) < 2d.$$

Określmy miary $\mu_1$, $\nu_2$ przez ich współczynniki Fouriera-Stieltjesa

$$\widehat{\mu_1} = \widehat{\mu} \cdot \chi_\Gamma \; \widehat{\nu_1} = \widehat{\nu} \cdot \chi_\Gamma.$$

W istocie mamy tu do czynienie ze splotem z pewną miarą dyskretną. Ponieważ jest to splot z miarą o normie 1 warunek

$$||a\mu_1 + \nu_1||_{M(\mathbb{T})} < K$$

jest nadal spełniony. Z definicji postępu $\Gamma$ zachodzi także

$$\#\mu_1 < 2d.$$

Z twierdzenia trzech autorów dostajemy również

$$||\mu_1||_{M(\mathbb{T})} \geqslant c \ln d \text{ dla pewnej stałej } c > 0.$$

Niech teraz $\Theta$ będzie wielomianem BPB dla zbioru $supp\mu_1$. Z definicji ma on następujące trzy własności

1. $||\Theta||_{L^1(\mathbb{T})} < 2$.

2. $\widehat{\Theta}(n) = 1$ dla $n \in supp\mu_1$.

3. $\#\Theta < C^{2d}$ dla pewnej stałej $C > 0$.

Teraz otrzymujemy

$$2K > ||(a\mu_1 + \nu_1) * \Theta||_{M(\mathbb{T})} = ||a\mu_1 + \nu_1 * \Theta||_{M(\mathbb{T})} \geqslant |a|||\mu_1||_{M(\mathbb{T})} - ||\Theta * \nu_1||_{M(\mathbb{T})}.$$

Normę pierwszą możemy zawsze oszacować z górą przez drugą, więc korzystając z własności wielomianu $\Theta$ oraz założeń dostajemy

$$||\Theta * \nu_1||_{L^1(\mathbb{T})} \leqslant ||\Theta * \nu_1||_{L^2(\mathbb{T})} \leqslant 2\varepsilon\sqrt{2d}.$$

Zbierając wszystkie te rezultaty możemy napisać

$$2K > |a| \cdot c \ln d - 2\varepsilon\sqrt{2d}.$$

Zatem, gdybyśmy założyli na początku, że $d = \frac{2K}{|a|c}$, to dobierając $\varepsilon = \frac{|a|c \ln d}{4\sqrt{2d}}$ otrzymalibyśmy sprzeczność dowodzącą słuszności lematu. □

Czas na drugi lemat.

**Lemat 3.11.6.** *Istnieje funkcja $\delta = \delta(|a|, K)$ taka, że jeśli $||a\mu + \nu|| < K$ dla $\mu \in E_0$ oraz $\nu \in F(\delta)$, to $||a\mu|| < 2K$.*

*Dowód.* Z twierdzenia trzech autorów mamy

$$\#\mu < c \exp ||\mu||_{M(\mathbb{T}}.$$

Niech $\Theta$ będzie wielomianem BPB dla zbioru $supp\widehat{\mu}$ o własnościach

1. $||\Theta||_{L^1(\mathbb{T})} < \frac{3}{2}$.

2. $\widehat{\Theta}(n) = 1$ dla $n \in supp\widehat{\mu}$.

3. $\#\Theta < \exp(\lambda\#\mu)$ dla pewnej stałej $\lambda > 0$.

Korzystając z lematu 3.11.5 dostajemy

$$\#\Theta < \exp(\lambda(\exp(cK|a|^{-1}))), \text{ gdzie stała } c > 0 \text{ jest taka jak w lemacie 3.11.5.} \tag{3.14}$$

Dalej, uzyskujemy

$$\frac{3}{2}K \geqslant ||\Theta * (a\mu + \nu)||_{L^1(\mathbb{T})} = ||a\mu + \Theta\nu||_{L^1(\mathbb{T})} \geqslant ||a\mu||_{L^1(\mathbb{T})} - ||\Theta * \nu||_{L^1(\mathbb{T})}.$$

Z własności wielomianu $\Theta$ mamy $|\widehat{\Theta}| < \frac{3}{2}$, więc $\Theta * \nu \in F(\frac{3}{2}\delta)$. W oparciu o nierówność 3.14 otrzymujemy

$$\#\Theta * \mu \leqslant \#\Theta < \exp(\lambda(\exp(cK|a|^{-1}))).$$

Szacując ponownie normę pierwszą przez drugą osiągamy teraz

$$||\Theta * \mu||_{L^1(\mathbb{T})} \leqslant ||\Theta * \mu||_{L^2(\mathbb{T})} \leqslant \frac{3}{2}\delta \exp(\lambda(\exp(cK|a|^{-1}))).$$

Zbierając wszystkie te rezultaty dochodzimy do

$$\frac{3}{2}K > ||a\mu||_{M(\mathbb{T})} - \frac{3}{2}\delta \exp(\lambda(\exp(cK|a|^{-1}))).$$

Jeżeli teraz $\delta < K \exp(-\lambda(\exp(cK|a|^{-1})))$, to założenie $||a\mu||_{M(\mathbb{T})} > 2K$ prowadzi do sprzeczności. □

Możemy już udowodnić główne twierdzenie.

**Twierdzenie 3.11.7** (Rozwiązanie osłabionego problemu Wienera-Pitta)**.** *Niech* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będzie ciągiem liczb zespolonych takim, że*

$$|a_{n+1}| < \min\left(4^{-n}, \delta\left(\frac{1}{2}K3^n, |a_n|\right)\right),$$

*to każda miara* $\mu \in M_0(\mathbb{T})$ *spełniająca* $||\mu||_{M(\mathbb{T})} < K$ *oraz taka, że* $\widehat{\mu}(\mathbb{Z}) \subset \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *ma naturalne spektrum.*

*Dowód.* Mamy

$$\widehat{\mu} = \sum_k a_k \widehat{\mu_k} \text{ dla pewnych } \mu_k \in E_0.$$

Wykażemy indukcyjnie, że

$$||a_k \mu_k||_{L^1(\mathbb{T})} < K3^k. \text{ dla } k \in \mathbb{N}.$$

Istotnie, z nierówności trójkąta

$$||\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\mu_k||_{M(\mathbb{T})} \leqslant ||\sum_{k=1}^{\infty} a_k\mu_k||_{M(\mathbb{T})} + \sum_{k=1}^{n} ||a_k\mu_k||_{M(\mathbb{T})} \leqslant K + \sum_{k=1}^{n} K3^k \leqslant \frac{3}{2}L3^n.$$

Nietrudno zauważyć (z definicji funkcji $\delta$), że dla $k > n+1$ mamy

$$|a_k| < |a_{n+1}| < \delta(\frac{1}{2}K3^{n+1}, a_{n+1}),$$

więc określając miarę $\nu$ przez warunek

$$\widehat{\nu} = \sum_{k=n+2}^{\infty} a_k\mu_k \in F(\delta).$$

Zatem stosując lemat 3.11.6 do miary $a_{n+1}\mu_{n+1}+\nu$ dostajemy $||a_{n+1}\mu_{n+1}|| \leqslant K3^{n+1}$. Stosując udowodnione oszacowanie dostajemy $\sum_k ||a_k^2\mu_k|| < \infty$, więc szereg określający miarę $\mu * \mu = \sum_k a_k^2\mu_k$ jest zbieżny bezwzględnie $L^1(\mathbb{T})$. Stąd $\mu * \mu \in L^1(\mathbb{T})$. Oznacza to jednak, że $\mu \in \mathscr{C}$ (to kilkakrotnie wykorzystywany fakt pochodzący z pracy Zafrana), co kończy dowód. □

Odnotujmy jeszcze ważną uwagę.

**Uwaga 3.11.8.** *Zależności ciągu* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *od* $K$ *można się pozbyć za pomocą metody przekątniowej.*

**Komentarze i odniesienia do literatury.** Twierdzenie trzech autorów można znaleźć w artykule [McGehee,Pigno,Smith]. Konstrukcja wielomianu BPB jest świetnie opisana w książce [Wojtaszczyk]. Główne twierdzenie tego podrozdziału jest zupełnie nowe i z całą pewnością nie było nigdy wcześniej publikowane. Problem Wienera-Pitta w algebrze $M(\mathbb{T})$ pozostaje otwarty, lecz można się spodziewać, że rozwiązanie (pozytywne) zostanie niedługo podane.

# Bibliografia


[Brown,Moran] G.Brown, W. Moran: *On Orthogonality of Riesz Products*, Proc. Camb. Phil. Soc. (1974), 76, 173.

[Engelking] R. Engelking: *Topologia Ogólna*, PWN, Warszawa 2007.

[Graham] C.C. Graham: *A Riesz Product Proof of the Wiener-Pitt Theorem*, Proceedings of American Mathematical Society, vol. 44, number 2, 1974.

[Graham,McGehee] C.C. Graham, O.C. McGehee: *Essays in Commutative Harmonic Analysis*, Springer-Verlag, 1979.

[Hartman] S. Hartman: *Wstęp do Analizy Harmonicznej*, PWN, Warszawa 1969.

[Helson] H. Helson: *Harmonic Analysis*, Hindustian Book Agency, 1995.

[Hörmander] L. Hörmander: *Estimates for Translation Invariant Operators in Lp Spaces*, Acta Mathematica Volume 104, Numbers 1-2 (1960), 93-140.

[Katznelson] Y. Katznelson: *An Introduction To Harmonic Analysis*, Cambridge University Press, 2004.

[Larsen] R. Larsen: *The Multiplier Problem*, Springer, 1969.

[Leja] F. Leja: *Funkcje Zespolone*, PWN, Warszawa 2006.

[McGehee,Pigno,Smith] .C. McGehee, L. Pigno, B. Smith: *Hardy's Inequality and the L1 Norm of Exponential Sums*, The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 113, No. 3 (Maj,1981), pp. 613-618.

[Musielak] J. Musielak: *Wstęp do Analizy Funkcjonalnej*, PWN, Warszawa 1976.

[Rudin1] W. Rudin: *Analiza rzeczywista i zespolona*, PWN, Warszawa 1986.

[Rudin2] W. Rudin: *Analiza Funkcjonalna*, PWN, Warszawa 2009.

[Rudin3] W. Rudin: *Fourier Analysis on Groups*, Interscience Publishers, Madison 1967.

[Wiener,Pitt] N. Wiener, H.R. Pitt: *Absolutely Convergent Fourier-Stieltjes Transforms*, Duke Mathematical Journal, vol. 4 (1938), pp. 420-436.

[Wojtaszczyk] P. Wojtaszczyk: *Banach Spaces for Analysts*, Cambridge University Press, 1991.

[Zafran] M. Zafran: *On Spectra of Multipliers*, Pacific Journal of Mathematics, vol. 47, no.2, 1973.

[Zdunik] A. Zdunik: *Skrypt do Układów Dynamicznych*, skrpyt MIMUW.

[Zygmund] A. Zygmund: *Trygonometric Series*, Cambridge University Press, 2002.

[Żelazko] W. Żelazko: *Algebry Banacha*, PWN, Warszawa 1968.