Teoria Aproksymacji

Na podstawie wykładu dra Pawła Bechlera spisał Przemysław Ohrysko

15 maja 2013

Zajmiemy się teraz aproksymacją w $C(K)$, gdzie K to zwarta przestrzeń Hausdorffa. Wprowadzamy również oznaczenie $M(f) = \{x \in K : |f(x)| = ||f||_\infty\}$.

Twierdzenie 1 (Kryterium Kołmogorowa)**.** *Niech $V \subset C(K)$ jest podprzestrzenią liniową, $v_0 \in V$, $x \in C(K)$. Wówczas $v_0 \in P_V(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\underset{v\in V}{\forall}\ \underset{t\in M(x-v_0)}{\exists} Re((\overline{x(t)-v_0(t)}v(t))) \leqslant 0.$$

Dowód. $\Leftarrow$ Uzasadnimy najpierw poniższy fakt. Niech $x \in C(K)$, $v_0 \in V$ oraz $U \subset \{t \in K : x(t) - v_0(t) \neq 0\}$. Jeśli

$$\underset{v\in V}{\forall}\ \underset{t\in K}{\exists} Re((\overline{x(t)-v_0(t)}v(t))) \leqslant 0,$$

to $\operatorname{dist}(x, V) \geqslant \inf_{t\in U} |x(t) - v_0(t)|$. Niech $\beta = \int_{t\in U} |x(t) - v_0(t)|$. Jeśli $\beta = 0$, to koniec. W przypadku, gdy $\beta > 0$ przypuśćmy, że $\operatorname{dist}(x, V) < \beta$. Istnieje wówczas $v_1 \in V$ takie, że $||x - v_1|| > \beta$ i wtedy dla $t \in U$ mamy $|x(t) - v_1(t)| < |x(t) - v_0(t)|$. Niech $v = v_1 - v_0$. Wykonujemy rachunek

$$Re((\overline{x(t)-v_0(t)})v(t)) = \frac{1}{2}(|x(t)-v_0(t)|^2+|v(t)|^2-|x(t)-v_0(t)-v(t)|^2) = \frac{1}{2}(|x(t)-v_0(t)|^2+|v(t)|^2-|x(t)-v_1($$

Ostatnia nierówność jest sprzecznością. Aby zakończyć dowód tej implikacji wystarczy zastosować udowodniony fakt do $U = M(x - v_0)$.
$\Rightarrow$ Znów uzasadnimy najpierw pewien fakt. Niech $x \in C(K)$, $v_0 \in V$. Jeżeli istnieje $v \in V$ takie, że dla $t \in M(x - v_0) = M$ mamy $Re((\overline{x(t)-v_0(t)})v(t)) > 0$, to istnieje $v_1 \in V$ spełniające $||x-v_1| < ||x-v_0||$. Ze zwartości M istnieje $\alpha > 0$ takie, że

$$\inf_{t\in M} Re((\overline{x(t)-v_0(t)})v(t)) > \alpha > 0.$$

Niech $\beta = ||v||$. Z założenia $\beta > 0$. Niech $U = \{t \in K : Re((\overline{x(t)-v_0(t)})v(t)) > \frac{\alpha}{2}\}$ oraz $\delta > 0$. Przyjmijmy $v_1 = v_0 + \delta v$. Dla $t \in K$ dostajemy

$$|x(t) - v_0(t)|^2 - 2\delta Re((\overline{x(t)-v_0(t)})v(t)) + \delta^2|v(t)|^2.$$

Wyróżniamy dwie możliwości.
Po pierwsze, może się zdarzyć, że $t \in U$. Wówczas mamy

$$|x(t) - v_1(t)|^2 \leqslant |x(t) - v_0(t)|^2 - \delta\alpha + \delta^2||v||^2,$$

ale $-\delta\alpha + \delta^2||v|| < 0$ dla dostatecznie małych $\delta > 0$. Drugi przypadek to $t \notin U$. Wtedy

$$Re((\overline{x(t)-v_0(t)})v(t)) \leqslant \frac{\alpha}{2}.$$

Możemy napisać

$$|x(t) - v_1(t)| \leqslant |x(t) - v_0(t)| + \delta|v(t)| \leqslant \xi(t)||x - v_0|| + \delta||v||.$$

$\xi(t) \in [0,1)$, bo $\xi(t) = \frac{|x(t)-v_0(t)|}{||x-v_0||} < 1$. Teraz $t \notin U$, więc $t \notin M$. Dalej, $K \setminus U$ jest zwarty, co daje $\max_{t\in K\setminus U} |\xi(t)| = \gamma < 1$. Zatem

$$|x(t) - v_1(t)| \leqslant \gamma||x - v_0|| + \delta||v|| < ||x - v_0||.$$

Dla dostatecznie małych δ i wszystkich $t \notin U$. $\square$

Definicja 2. *Podprzestrzeń $V \subset C(K)$ wymiaru n nazywamy przestrzenią Haara, jeżeli istnieje baza $v_1, ldots, v_n$ przestrzeni V taka, że dla dowolnych parami różnych $t_1, \ldots, t_n \in K$ zachodzi*

$$\det(v_i(t_j))_{i,j=1}^n \neq 0.$$

Przykład 1. *$V = \mathrm{lin}(1, t, t^2, \ldots, t^n)$ jest przestrzenią Haara.*

Stwierdzenie 3. *Następujące warunki są równoważne*

1. *V jest przestrzenią Haara.*
2. *Jeśli $v \in V$ oraz $v(t_i) = 0$ dla pewnych n różnych $t_i \in K$, to $v = 0$.*
3. *Dla dowolnych $t_1, \ldots, t_n \in K$ parami różnych odwzorowanie $T : V \mapsto K^n$ zadane wzorem $Tv = [v(t_1), \ldots, v(t_n)]$ jest izomorfizmem liniowym.*
4. *Dla dowolnej bazy $w_1, \ldots, w_n$ przestrzeni V $\det(w_i(t_j))_{i,j=1}^n \neq 0$ dla dowolnych $t_1, \ldots, t_n \in K$ różnych.*

Dążymy do dowodu następującego twierdzenia.

Twierdzenie 4 (Haara-Kołmogorowa)**.** *Załóżmy, że $\#K \geqslant n + 1$, $V \subset C(K)$ jest podprzestrzenią liniową wymiaru n. Wówczas V jest zbiorem Czebyszewa wtedy i tylko wtedy, gdy V jest przestrzenią Haara.*

Dowód. $\Leftarrow$ Jak zwykle udowodnimy najpierw fakt pomocniczy. Przy założeniach twierdzenia, jeżeli $V \subset C(K)$ jest Haara, $x \in C(K)$, $v \in P_V(x)$, to $\#M(x-v) \geqslant n + 1$. Możemy założyć, że $x \notin V$. Niech $M = \{t_1, \ldots, t_s\}$ i przypuśćmy iż $1 \leqslant s \leqslant n$. Istnieje $v_1 \in V$ taki, że $v_1(t_j) = x(t_j) - v(t_j)$ dla $j = 1, \ldots, s$. Zatem

$$Re((\overline{x(t_j) - v(t_j)})v_1(t_j)) = |x(t_j) - v(t_j)|^2 = ||x - v||^2 > 0.$$

Z kryterium Kołmogorowa $v \notin P_V(x)$. Powracamy do dowodu twierdzenia. Załóżmy, że V jest przestrzenią Haara oraz $x \in C(K) \setminus V$, $v_1, v_2 \in P_V(x)$. Wówczas również $v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \in P_V(x)$ i z udowodnionego faktu istnieją $t_0, \ldots, t_n \in K$ takie, że $t_j \in M(x - v)$. Stąd

$$x(t_j) - v(t_j) = e^{i\theta_j}||x - v|| = e^{i\theta_j}\mathrm{dist}(x, V) \text{ dla } j = 0, 1, \ldots, n,\ \theta_j \in [0, 2\pi).$$

Dla takich samych t_j mamy

$$x(t_j) - v_1(t_j) = e^{i\mu_j}\mathrm{dist}(x, V)$$
$$x(t_j) - v_2(t_j) = e^{i\nu_j}\mathrm{dist}(x, V).$$

Dalej, $v_1+v_2=2v$. A stąd $e^{i\mu_j}+e^{i\nu_j}=2e^{i\theta_j}$, czyli $|e^{i\mu_j}+e^{i\nu_j}|=2$, co implikuje $e^{i\mu_j}=e^{i\nu_j}$. Skoro V jest Haara, to $v_1=v_2$, co kończy dowód tej implikacji.
$\Rightarrow$ Załóżmy, że V nie spełnia warunku Haara, czyli

$$\exists_{v_0\in V\setminus\{0\}} \quad v_0(t_i)=0 \text{ dla pewnych } n \text{ różnych punktów } t_i\in K.$$

Pokażemy, że istnieje $x\in C(K)$, dla którego zbiór $P_V(x)$ jest nieskończony. Załóżmy, że $||v_0||=1$ i niech $x_1,\ldots,x_n$ baza V. Mamy układ równań

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i(t_j)=0 \; j=1,\ldots,n,$$

który ma niezerowe rozwiązanie $[\widetilde{\alpha_1},\ldots,\widetilde{\alpha_n}]$. Zatem $\det(x_i(t_j))_{i,j=1}^{n}=0$. Niech $V\ni v=\lambda_1x_1+\ldots\lambda_nx_n$. Piszemy

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_jv(t_j)=\sum_{j=1}^{n}\beta_j\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i(t_j)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sum_{j=1}^{n}\beta_jx_i(t_j)=0$$

dla pewnych $(\beta_1,\ldots,\beta_n)\neq 0$. Otrzymaliśmy więc

$$\forall_{v\in V}\sum_{j=1}^{n}\beta_jv(t_j)=0. \tag{1}$$

Rozważmy $\psi_j : K\mapsto[0,1]$, ψ_j są ciągłe oraz $\psi_j(t_i)=\delta_{i,j}$. Określmy teraz $a_j=\frac{\overline{\beta_j}}{|\beta_j|}$ dla $\beta_j\neq 0$ oraz $a_j=0$ dla $\beta_j=0$. Niech

$$y=\max(1,\left|\sum_{j=1}^{n}a_j\psi_j\right|)^{-1}\cdot\sum_{j=1}^{n}a_j\psi_j.$$

$||y||_\infty=1$, $y(t_i)=\frac{\overline{\beta_j}}{|\beta_j|}$, gdy $\beta_j\neq 0$ i $y(t_j)=0$, gdy β_j-0. Przyjmijmy $x=y(1-\frac{1}{2}|v_0|)$. Pokażemy, że dla $|\alpha|\leqslant\frac{1}{2}$, $\alpha v_0\in P_V(x)$. Weźmy takie j, że $\beta_j\neq 0$. Wówczas

$$1=|x(t_j)|\leqslant||x||_\infty\leqslant||y||_\infty||1-\frac{1}{2}|v_0|||\leqslant 1.$$

Zatem $||x||_\infty=1$. Pokażemy, że $\mathrm{dist}(x,V)=1$. Przypuśćmy, że $\mathrm{dist}(x,V)<1$. Wtedy istnieje $w\in V$ o własności $|x(t_j)-w(t_j)|\leqslant||x-w||\leqslant 1$. Gdy $\beta_j\neq 0$, to

$$||\beta_j|-\beta_jw(t_j)|=|\beta_j(x(t_j)-w(t_j))|<|\beta_j|.$$

Zatem $Re\beta_jw(t_j)>0$ i to jest sprzeczność z warunkiem (1). Zatem $\mathrm{dist}(x,V)=1$. Niech $|\alpha|<\frac{1}{2}$. Uzyskujemy

$$|x(t)-\alpha v_0(t)|\leqslant|x(t)|+|\alpha||v_0(t)|=|y(t)||1-\frac{1}{2}|v_0(t)||+|\alpha||v_0(t)|\leqslant 1-\frac{1}{2}|v_0(t)|+|\alpha||v_0(t)|\leqslant 1.$$

Stąd $\alpha v_0\in P_V(x)$. $\square$

Twierdzenie 5 (Caratheodory)**.** *$A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathrm{conv}A$. Wówczas istnieją $a_0 \ldots, a_m$, $m \leqslant n$ oraz $\lambda_0, \ldots, \lambda_m > 0$, $\lambda_0 + \ldots + \lambda_m = 1$ takie, że*

$$x = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i a_i.$$

Dowód. Niech $x = \sum_{i=0}^{s} \lambda_j a_j$ i jest to najkrótsze przedstawienie x jako kombinacji wypukłej elementów z A. Przyjmujemy $x = 0$, czyli $\sum_{i=0}^{s} \lambda_j a_j = 0$, $\lambda_j \neq 0$. Dla $s = n$ koniec. Niech więc $s > n$. Wtedy $a_1, \ldots, a_n$ są liniowo zależne. Stąd istnieją $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ nie wszystkie równe 0 takie, że $0 = \sum_{j=1}^{s} \gamma_j a_j$, czyli

$$0 = \sum_{j=0}^{s} \lambda_j a_j + \alpha \sum_{j=1} \gamma_j a_j = \lambda_0 a_0 + \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j + \alpha\gamma_j) a_j.$$

Niech $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^s$, $\varphi(\alpha) = (\lambda_1 + \alpha\gamma_1, \ldots, \lambda_s + \alpha\gamma_s)$, ϕ jest ciągłe, $\phi(0) \in (0, \infty)^s$. Dalej, $U = \varphi^{-1}((0, \infty)^s)$ jest zbiorem otwartym. Weźmy (c, d) - spójną składową U zawierającą 0. Oczywiście $(c, d) \neq \mathbb{R}$. Niech α_0 będzie skończonym końcem odcinka (c, d). Wtedy $\alpha_j + \alpha_0\gamma_j \geqslant 0$ i dla pewnego j_0 $\lambda_{j_0} + \alpha_{j_0}\gamma_{j_0} = 0$, czyli wyjściową sumą możemy skrócić. □

Lemat 6. *Zbiór $K \subset \mathbb{R}^n$ jest zwarty. Rozważamy układ nierówności liniowych $< a, z >> 0$, $a \in K$. Ten układ jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy $0 \in \mathrm{conv}K$.*

Dowód. $\Rightarrow$ Jeśli $0 \in \mathrm{conv}A$, to z twierdzenia Caratheodory'ego istnieją $a_j \in K$, $\lambda_0, \ldots, \lambda_m > 0$, $m \leqslant n$ takie, że

$$0 = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j a_j.$$

Załóżmy, że istnieje $z \in K$ takie, że dla każdego $a \in K < a, z >> 0$. Ale

$$0 =< \sum_{j=0}^{m} \lambda_j a_j, z >= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j < a_j, z >> 0.$$

$\Leftrightarrow$, $\mathrm{conv}K$ jest zwarty, $0 \notin K$, to dla pewnego $x \in \mathrm{conv}K$ mamy

$$||x|| = \inf\{||a|| : a \in \mathrm{conv}K\} > 0.$$

Dla $a \in K$ i $\theta \in (0, 1)$ zachodzi

$$0 \leqslant ||\theta a + (1 - \theta)x||^2 - ||x||^2 = \theta^2||a - x||^2 + 2\theta < a - x, x > .$$

Przechodząc z θ do zera dostajemy $< a - x, x >\geqslant 0$, czyli $< a, x >\geqslant< x, x >> 0$. □

Lemat 7. *Niech $V \subset C_{\mathbb{R}}(K)$ jest n-wymiarową podprzestrzenią liniową z bazą $v_1, \dots, v_n$. Wówczas $v \in P_V(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$0 \in \operatorname{conv}\{(x-v)(t)(v_1(t), \dots, v_n(t)) : y \in M(x-v).$$

Dowód. Z kryterium Kołmogorowa

$$v \in P_V(x) \Leftrightarrow \underset{h \in V}{\forall} \underset{t \in M(r)}{\exists} r(t)h(t) \leqslant 0 \Leftrightarrow \neg \left(\underset{h \in V}{\exists} \underset{t \in M(r)}{\forall} r(t)h(t) > 0 \right) \Leftrightarrow \neg \left(\underset{\alpha \in \mathbb{R}^n}{\exists} \underset{t \in M(r)}{\forall} < \alpha, r(t)(v_1(t), \dots, \right.$$

Niech

$$A = \{r(t)(v_1(t), \dots, v_n(t)) \in \mathbb{R}^n : t \in M(r)\}.$$

Dalej, stosujemy lemat poprzedni. □

Lemat 8. *Układ $v_1, \dots, v_n$ jest bazą podprzestrzeni Haara $C_{\mathbb{R}}([a,b])$, $a \leqslant t_0 < t_1 < \dots, < t_n \leqslant b$, $\lambda_0, \dots, \lambda_m \neq 0$. Wówczas*

$$0 \in \operatorname{conv}\{\lambda_j(v_1(t_j), \dots, v_n(t_j)) \in \mathbb{R}^n : j = 0, 1, \dots, n\}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda_j \lambda_{j+1} < 0$ dla $j = 0, 1, \dots, n-1$

Dowód. Z założeń mamy $\det[v_i(t_j)]_{i,j=1}^n \neq 0$ i z ciągłości wyznacznika znak nie zależy od wyboru $(t_1, \dots, t_n)$

$$0 \in \operatorname{conv}\{\lambda_j(v_1(t_1), \dots, v_n(t_n)) : j = 0, \dots, n\},$$

czyli

$$0 = \sum_{j=0}^{n} \theta_j \lambda_j (v_1(t_1), \dots, v_n(t_j)),$$

gdzie $\theta_j \geqslant 0$, $\sum \theta_j = 1$ oraz $\theta_0 \neq 0$. Wtedy

$$-(v_1(t_0), \dots, v_n(t_0)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\theta_j \lambda_j}{\theta_0 \lambda_0} (v_1(t_j), \dots, v_n(t_j)).$$

Niech $x_j = \frac{\theta_j \lambda_j}{\theta_0 \lambda_0}$. Mamy układ n równań liniowych o niezerowym wyznaczniku równym $D(t_1, \dots, t_n = \det[v_i(t_j)]_{i,j=1}^n$. Ze wzorów Cramera dostajemy

$$-x_j = -\frac{\theta_j \lambda_j}{\theta_0 \lambda_0} = \frac{D(t_1, \dots, t_{j-1}, t_0, t_{j+1}, \dots, t_n)}{D(t_1, \dots, t_n)} = (-1)^{j-1} \frac{D(t_0, t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_n)}{D(t_1, \dots, t_n)} = (-1)^{j-1} d_j.$$

$d_j > 0$ i mamy $\lambda_j \lambda_{j+1} < 0$. □

Twierdzenie 9 (O alternansie)**.** *Niech $V \subset C_{\mathbb{R}}([a,b])$ będzie n-wymiarową podprzestrzenią Haara, $x \in C_{\mathbb{R}}([a,b])$, $v \in V$. Wówczas $v \in P_V(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją punkty $a \leqslant t_0 < t_1 < \dots < t_n \leqslant b$ takie, że $|(x-v)(t_i)| = ||x-v||_\infty$ dla $i = 0, \dots, n$ oraz $\operatorname{sgn}(x-v)(t_i) = -\operatorname{sgn}(x-v)(t_{i+1})$ dla $i = 0, 1, \dots, n-1$.*

Dowód. Z lematu 2 $v \in P_V(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0 \in \text{conv}A$, gdzie

$$A = \{(x-v)(t)(v_1(t), \dots, v_n(t)) : t \in M(x-v)\}.$$

Zatem

$$0 = \sum_{j=0}^{k} \theta_j (x-v)(t_j)(v_1(t_j), \dots, v_n(t_j))$$

dla $t_j \in M(x-v)$, $k \leqslant n$. Z warunku Haara $k \leqslant n$. Zatem $k = n$. Z lematu 3 ostatni układ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{sgn}(x-v)(t_j) = -\text{sgn}(x-v)(t_{j-1})$. $\square$

Przechodzimy do aproksymacji trygonometrycznej.
Niech $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ oznacza przestrzeń Banacha funkcji ciągłych 2π okresowych. Przyjmijmy

$$V_n = \{\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} : c_k \in \mathbb{C}\}.$$

Wówczas $\text{dim}V_n = 2n+1$. Dla $v \in V_n$ możemy stosować także notację rzeczywistą.
Operatory Fouriera
Niech $F_n : C_{2\pi}(\mathbb{R}) \mapsto C_{2\pi}(\mathbb{R})$ będzie określony na

$$F_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikt},$$

gdzie

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}.$$

Stwierdzenie 10. *$F_n \in L(C_{2\pi}(\mathbb{R}))$ oraz $||F_n|| \leqslant 2n+1$.*

Stwierdzenie 11. *UKład (e^{ikt}) jest bazą ortogonalną w $L^2([-\pi, pi])$ i F_n jest rzutem ortogonalnym na V_n.*

Wprowadzamy **jądro Dirichleta** za pomocą wzoru $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$.

Stwierdzenie 12. *Zachodzi wzór $D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}$. Ponadto dla $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$ zachodzi*

$$(F_n f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) D_n(s) ds.$$

Operatory Fejera
$G_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} F_k$. Określamy jądro Fejera za pomocą wzoru $K_n(s) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{ns}{2}}{\sin\frac{s}{2}}\right)^2$.

Stwierdzenie 13. *Zachodzi wzór*

$$(G_n(f))(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) K_n(s) ds.$$

Definicja 14. *$\phi \in L(C(K))$ jest dodatni, jeśli $f \geqslant 0 \Rightarrow \phi(f) \geqslant 0$.*

Jeśli operator ϕ jest dodatni, to $f \leqslant g$ implikuje $\phi(f) \leqslant \phi(g)$.

Twierdzenie 15 (Korowkin)**.** *Operatory $L_n \in L(C_{2\pi}(\mathbb{R}))$ są dodatnie. Wówczas $L_n f \rightrightarrows f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ dla każdej funkcji $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $L_n f_i \rightrightarrows f_i$ dla $i = 0, 1, 2$, gdzie $f_0 = 1$, $f_1(t) = \cos t$, $f_2(t) = \sin t$.*

Dowód. Niech $x, t \in \mathbb{R}$, $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, $M = ||f||_\infty$. Wówczas $|f(x) - f(t)| \leqslant 2M$. Z jednostajnej ciągłości f

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{\delta>0}{\exists} \; |x - t| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \varepsilon.$$

Rozważmy $\psi_\alpha(x) = \sin^2 \frac{x-\alpha}{2}$. Wykażemy, że $(L_n\psi_\alpha)(x) = \psi_\alpha(x) + \gamma_n(x, \alpha)$ oraz $\gamma_n \rightrightarrows 0$ jednostajnie po x i α. Istotnie, zauważmy że $\psi_\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha\cos x - \sin\alpha\sin x)$. Stąd

$$\begin{aligned}(L_n \cos t)(x) &= \cos x + \xi_n(x)\\ (L_n \sin t)(x) &= \sin x + \eta_n(x)\\ (L_n 1)(x) &= 1 + \beta_n(x)\end{aligned}$$

Liczymy,

$$\begin{aligned}(L_n\psi_\alpha)(x) &= \frac{1}{2}(1 + \beta_n(x) - \cos\alpha(\cos x + \xi_n(x)) - \sin\alpha(\sin x + \eta_n(x))) =\\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha\cos x - \sin\alpha\sin x) + \frac{1}{2}(\beta_n - \cos\alpha\xi_n(x) - \sin\alpha\eta_n(x)) =\\ &\qquad \psi_\alpha(x) + \gamma_n(x, \alpha),\end{aligned}$$

gdzie $\gamma_n \rightrightarrows 0$. Wracamy do dowodu. Dla dowolnego $x, \alpha \in \mathbb{R}$ mamy

$$-\varepsilon - \frac{2M\psi_\alpha(x)}{\sin^2\frac{\delta}{2}} < f(x) - f(\alpha) < \varepsilon + \frac{2M\psi_\alpha(x)}{\sin^2\frac{\delta}{2}}.$$

Wynika to stąd, iż możemy przyjąć $x \in (\alpha - \delta, 2\pi + \alpha - \delta)$ (z okresowości). Jeśli $|x - \alpha| < \delta$, to mamy tezę z jednostajnej ciągłości. Ponadto, dla $\delta \leqslant x - \alpha \leqslant 2\pi - \delta$ mamy z monotoniczności sinusa $\frac{\psi_\alpha(x)}{\sin^2\frac{\delta}{2}} \geqslant 1$ i teraz nierówność wynika z oszacowania $|f(x) - f(t)| \leqslant 2M$. Działając operatorami L_n na tej nierówności dostajemy

$$-\varepsilon(L_n 1)(x) - \frac{2M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}(L_n\psi_\alpha)(x) \leqslant (L_n f)(x) - f(\alpha)(L_n 1)(x) \leqslant \varepsilon(L_n 1)(x) + \frac{2M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}(L_n\psi_\alpha(x))$$

Teraz, $(L_n 1) = 1 + \beta_n(x)$. Zatem

$$\begin{aligned}|(L_n f)(x) - f(\alpha)| &\leqslant |(L_n f)(x) - f(\alpha)(1 + \beta_n(x))| + |f(\alpha)||\beta_n(x)| \leqslant\\ &\leqslant \varepsilon(1 + |\beta_n(x)|) + \frac{2M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}(\psi_\alpha(x) + |\gamma_n(x, \alpha)|) + |f(\alpha)||\beta_n(x)|.\end{aligned}$$

Istnieje n_0 takie, że dla $n > n_0$ prawa strona jest nie większa niż $2\varepsilon + \frac{2M}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \psi_\alpha(x)$.

Żądamy, aby $|\beta_N| \leqslant \frac{1}{10M}\varepsilon$, $|\gamma_n| \leqslant \frac{1}{10}\frac{\sin^2 \frac{\delta}{2}}{2M}\varepsilon$.

Zatem, dla $n > n_0$ i $x, \alpha \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$|L_n f(x) - f(\alpha)| \leqslant 2\varepsilon + \frac{2M}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \sin^2 \frac{x-\alpha}{2}$$

Teraz, gdy $\alpha \to x$ dostajemy $|L_n f(x) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon$. □

Wniosek 16. *Dla każdego $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ zachodzi $G_n f \rightrightarrows f$.*

Twierdzenie 17 (Weierstrass)**.** *Wielomiany trygonometryczne są gęste w $C_{2\pi}(\mathbb{R})$.*

Zachodzi ogólne twierdzenie.

Twierdzenie 18. *Niech X będzie przestrzenią Banacha, Y jest przestrzenią unormowaną, $\phi_n \in L(X,Y)$ dla $n = 1, 2, \ldots$, $\phi \in L(X,Y)$ oraz $F \subset X$ jest gęstym podzbiorem. Wówczas $\phi_n(x) \to \phi(x)$ dla każdego $x \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \phi(x) \ \text{dla } x \in F$$
$$\exists_{M>0} ||\phi_n|| \leqslant M \ \text{dla } n = 1, 2, \ldots$$

Dowód. $\Rightarrow$ wynika wprost z twierdzenia Banacha - Steinhausa.
$\Leftarrow$ Niech $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje $y \in F$ takie, że $||x - y|| < \varepsilon$. Stąd

$$||\phi(x) - \phi_n(x)|| \leqslant ||\phi(x-y)|| + ||\phi(y) - \phi_n(y)|| + ||\phi_n(x-y)||.$$

Dalej, $||\phi(x-y)|| \leqslant ||\phi|| ||x-y|| \leqslant ||\phi||\varepsilon$. Ponadto, istnieje n_0 takie, że dla $n > n_0$ takie, że $||\phi(y) - \phi_n(y)||\varepsilon$, a także $||\phi_n(y-x)|| \leqslant ||\phi_n|| ||y-x|| \leqslant M\varepsilon$. Ostatecznie, $||\phi(x) - \phi_n(x)|| \leqslant (||\phi|| + 1 + M)\varepsilon$. □

Stwierdzenie 19. *Zachodzi równość*

$$||F_n|| = \lambda_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt.$$

Dowód. Weźmy $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, $||f||_\infty \leqslant 1$. Po pierwsze, mamy

$$||F_n|| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt.$$

Ustalamy $t \in \mathbb{R}$, $g_t(u) = \operatorname{sgn} D_n(t-u)$. Wówczas

$$F_n(g_t)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(s)| ds.$$

Istnieją $g_{k,t} \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ takie, że $||g_{k,t}||_\infty \leqslant 1$, $|g_{k,t}(u)| \leqslant |g_t(u)|$ i $g_{k,t} \to g_t$ prawie wszędzie i korzystamy z twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej. □

Stwierdzenie 20. *Dla $n = 1, 2, \ldots$ zachodzi $\frac{4}{\pi^2} \ln n < \lambda_n < 3 + \ln n$.*

Dowód. D_n jest nieparzyste, więc

$$\lambda_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |D_n(t)|dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} |D_n(t)| + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} |D_n(t)|dt.$$

Dalej,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} |D_n(t)|dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \left|\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}\right| dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \left|1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right| dt \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} (\frac{1}{2}+n)dt = \frac{2}{\pi n}(\frac{1}{2}+n).$$

Zauważmy, że na $(0,\pi)$ zachodzi $\sin\frac{t}{2} > \frac{t}{\pi}$, a stąd

$$\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} |D_n(t)|dt = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt < \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{\pi}{t}dt = \ln\pi + \ln n.$$

Ostatecznie, $\lambda_n < \frac{2}{\pi_n}(\frac{1}{2}+n) + \ln\pi + \ln n < 3 + \ln n$. Pozostaje druga nierówność.

$$\lambda_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\right| dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\right| dx >$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)x|}{x}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{n+\frac{1}{2}} \frac{|\sin\pi u|}{u}du > \frac{2}{\pi}\int_0^{n} \frac{|\sin\pi u|}{u}du =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} \left|\frac{\sin\pi u}{u}\right| du = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} \sin\pi u du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}\right) \sin\pi u du > \frac{2}{\pi}\ln n \int_0^1 \sin\pi u du = \frac{4}{\pi^2}\ln n.$$

□

Wniosek 21. *Istnieją funkcje $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ takie, że $F_n(f)$ nie zbiega do f.*

Niech $V_n \subset C_{2\pi}(\mathbb{R})$, $V_n = \operatorname{lin}\{e^{ikt} : k = -n, \ldots, n\}$, $E_n(f) = \operatorname{dist}(f, V_n)$.

Stwierdzenie 22. *Jeżeli $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, to $||F_n - f||_\infty \leqslant (1 + 2\lambda_n)E_n(f)$.*

Dowód. Niech $t \in [-\pi, \pi)$ i określamy $\varphi_t \in (C_{2\pi}(\mathbb{R}))^*$ wzorem $\varphi_t f = (F_n f)(t) - f(t)$. Mamy $||\varphi_t|| \leqslant ||F_n|| + 1$ i $\varphi_t|_{V_n} = 0$. Zatem, dla dowolnego $v \in V_n$ mamy

$$|\varphi_t(f)| = |\varphi_t(f - v)| \leqslant ||\varphi_t|| \cdot ||f - v||_\infty \leqslant (||F_n|| + 1)||f - v||_\infty.$$

Jeżeli $v \in P_{v_n}(f)$, to

$$|\varphi_t(f)| = |(F_n f)(t) - f(t)| \leqslant (\lambda_n + 1)E_n(f).$$

□

Zajmijmy się następującym pytaniem: czy istnieje ciąg rzutów $L_n : C_{2\pi}(\mathbb{R}) \to V_n$ taki, że dla każdego $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ $||f - L_n f||_\infty \leqslant M E_n(f)$ dla pewnej stałej M niezależnej od f i n.

Stwierdzenie 23. *Następujące warunki są równoważne.*

1. *Istnieje ciąg rzutów $L_n : C_{2\pi}(\mathbb{R}) \to V_n$, $n = 0, 1, 2\dots$ i stała $M > 0$ taka, że dla każdego $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ zachodzi $||f - L_n f||_\infty \leqslant M E_n(f)$.*
2. *Istnieje ciąg rzutów $L_n : C_{2\pi}(\mathbb{R}) \to V_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ i stała $M > 0$ taka, że $||L_n|| \leqslant M$.*

Dowód. (2) $\Rightarrow$ (1), $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, $v \in P_{v_n}(f)$

$||L_n f - f||_\infty = ||L_n(f - v_n) - (f - v_n)||_\infty \leqslant (||L_n|| + 1)||f - v_n|| \leqslant (M+1)E_n(f)$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Szacujemy,

$$||L_n f||_\infty \leqslant ||L_n f - f||_\infty + ||f||_\infty \leqslant M E_n(f) + ||f||_\infty \leqslant (M+1)||f||_\infty.$$

□

Tu brakuje wykładu.
Zmierzamy do **nierówności Markowa i Bernsteina**. Zacznijmy od lematu.

Lemat 24 (Nierówność Schura)**.** *Niech $Q \in C[-1, 1]$ będzie wielomianem stopnia co najwyżej $n - 1$. Wówczas*

$$||Q||_\infty \leqslant \max_{x \in [-1,1]} \left| n\sqrt{1 - x^2} Q(x) \right|$$

Dowód. Oznaczmy prawą stronę nierówności przez M. Niech $x_k = \cos \frac{2k-1}{2n}\pi$ będą zerami wielomianu Czebyszewa T_n. Wówczas $1 > x_1 > \dots > x_n > -1$, $x_1 = -x_n$. Rozważamy dwa przypadki.
1. $|x| \leqslant x_1$. Wtedy $\sqrt{1 - x^2} \geqslant \sqrt{1 - x_1^2} = \sin \frac{\pi}{2n} \geqslant \frac{1}{n}$. Stąd $n\sqrt{1 - x^2} \geqslant 1$. Zatem

$$|Q(x)| \leqslant n\sqrt{1 - x^2}|Q(x)| \leqslant M.$$

Przechodzimy do drugiego przypadku, czyli $|x| > x_1$. Możemy napisać

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{n} Q(x_k) l_k(x), \text{ gdzie } l_k(x) = \prod_{j=1,\dots,n, j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - xj}.$$

Mamy

$$T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{j=1}^{n} (x - x_j).$$

Po zróżniczkowaniu mamy

$$T_n'(x) = 2^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \prod_{j \neq i} (x - x_j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_n(x)}{x - x_i}.$$

Stąd

$$l_k(x) = \frac{T_n}{(x - x_k)T_n'(x)}.$$

Ale

$$T_n'(x_k) = \frac{n \sin(n \arccos x_k)}{\sqrt{1 - x_k^2}} = n \frac{\sin(\frac{2k-1}{2}\pi)}{\sqrt{1 - x_k^2}} = (-1)^{k+1} \frac{n}{\sqrt{1 - x_k^2}}.$$

Teraz

$$Q(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{\sqrt{1 - x_k^2}}{x - x_k} Q(x_k).$$

Stąd, dla $k = 1, 2, \ldots, n$ mamy

$$|\sqrt{1 - x_k^2} Q(x_k)| \leqslant \frac{M}{n}.$$

Zatem

$$|Q(x)| \leqslant \frac{M}{n^2} |T_n| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|x - x_k|} = \frac{M}{n^2} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{T_n(x)}{x - x_k} \right| = \frac{M}{n^2} |T_n'(x)|.$$

Ostatecznie, $|Q(x)| \leqslant M$. □

Lemat 25. *Niech S będzie wielomianem trygonometrycznym nieparzystym stopnia co najwyżej n. Wówczas*

$$\sup_{t \in [0, 2\pi]} \left| \frac{S(t)}{\sin t} \right| \leqslant n \sup_{t \in [0, 2\pi]} .$$

Dowód. Zapisujemy S jako kombinację liniową sinusów

$$S(t) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kt.$$

Rozważmy $f_k(t) = \frac{\sin kt}{\sin t}$. Możemy napisać

$$f_k(t) = \sum_{l=0}^{k-1} a_{k,l} (\cos t)^l.$$

Istnieje zatem wielomian algebraiczny P stopnia mniejszego bądź równego od $n - 1$ taki, że

$$\frac{S(t)}{\sin t} = P(\cos t).$$

Z nierówności Schura

$$\sup_{x \in [-1,1]} |P(x)| \leqslant \max_{x \in [-1,1]} |n \sqrt{1 - x^2} P(x)| = \max_{t \in [0, 2\pi]} \left| n \sin t \frac{S(t)}{\sin t} \right| = n \max_{t \in [0, 2\pi]} |S(t)|.$$

□

Twierdzenie 26 (Nierówność Bernsteina). *Niech $T \in V_n$ ma wartości rzeczywiste. Wówczas*

$$||T'||_\infty \leqslant n||T||_\infty.$$

Dowód. Niech $f(\alpha, t) = \frac{1}{2}(T(\alpha + t) - T(\alpha - t))$. Wówczas $f(\alpha, \cdot) \in V_n$. Dla $M = ||T||_\infty$ mamy $|f(\alpha, t)| \leqslant M$ i $f(\alpha, \cdot)$ jest nieparzysty, więc

$$\sup_{t,\alpha} \left| \frac{f(\alpha, t)}{\sin t} \right| \leqslant n \cdot M.$$

Wykonujemy prosty rachunek

$$T'(\alpha) = \lim_{t\to 0} \frac{T(\alpha+t) - T(\alpha-t)}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\alpha,t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\alpha,t)}{\sin t} \cdot \frac{\sin t}{t}.$$

Stąd $|T'(\alpha)| \leqslant nM = n||T||_\infty$. □

Twierdzenie 27 (Nierówność Markowa). *Niech $P \in C([-1, 1])$ będzie wielomianem algebraicznym stopnia mniejszego równego od n. Wówczas dla $t \in [-1, 1]$ zachodzi*

$$|P'(t)| \leqslant n^2||P||_\infty.$$

Dowód. Niech $M = ||P||_\infty$. Wówczas

$$\max 0 \leqslant t \leqslant 2\pi|p(\cos t)| \leqslant M.$$

Z nierówności Bernsteina

$$|p'(\cos t)\sin t| \leqslant nM,$$

czyli

$$|p'(x)\sqrt{1 - x^2}| \leqslant nM.$$

Stosujemy nierówność Schura do p

$$|p'(x)| \leqslant \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |n\sqrt{1 - x^2}p'(x)| \leqslant n^2M.$$

□

Wnioskiem z dowodu jest druga nierówność Bernsteina.

Twierdzenie 28 (Druga nierówność Bernsteina). *Jeżeli $p \in C([-1, 1])$ jest wielomianem algebraicznym stopnia mniejszego bądź równego od n, to dla $t \in (-1, 1)$ zachodzi*

$$|p'(t)| \leqslant \frac{n}{\sqrt{1 - t^2}}||p||_\infty.$$

Udowodnimy teraz twierdzenie Bernsteina.

Twierdzenie 29 (Bernstein). *Funkcja $f : [-1,] \mapsto \mathbb{R}$ jest klasy C^∞ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{k\in\mathbb{N}} \lim_{n\to\infty} n^k e_n(f) = 0.$$

Dowód. $\Rightarrow$ wynika z nierówności Jacksona.
$\Leftarrow$ oznaczmy $\varepsilon_n(k) = n^k e_n(f)$. Weźmy $p_n \in P_n$ takie, że $||f - p_n||_\infty = e_n(f) = \frac{\varepsilon_n(k)}{n^k}$. Rozważmy szereg

$$p_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(p_{n+1} - p_n).$$

Różniczkując wyraz po wyrazie dostaniemy szereg zbieżny jednostajnie, gdyż z nierówności Markowa mamy

$$||p_{n+1}^{(m)} - p_n^{(m)}||_\infty \leqslant (n+1)^{2m}||p_{n+1} - p_n|| \leqslant (n+1)^{2m}(||f - p_{n+1}|| + ||f - p_n||) = \\ = \frac{(n+1)^{2m}}{n^k}(\varepsilon_{n+1}(k) + \varepsilon_n(k)).$$

Dla $k = 2m + 2$ mamy

$$||p_{n+1}^{(m)} - p_n^{(m)}||_\infty \leqslant C_m \frac{1}{n^2}$$

i dostajemy zbieżność jednostajną. □

Udowodnimy jeszcze wariant nierówności Jacksona dla wielomianów algebraicznych.

Twierdzenie 30 (Nierówności Jacksona dla przypadku algebraicznego)**.** *Niech $f \in C([-1,1])$. Wówczas zachodzą nierówności*

1. $e_n(f) \leqslant \frac{3}{2}\omega_f(\frac{\pi}{n+1})$
2. *Jeżeli f spełnia warunek Lipschitza, to $e_n(f) \leqslant \frac{M\pi}{2(n+1)}$, gdzie M to stała Lipschitza.*
3. *Niech $f \in C^k([-1,1])$. Wtedy*

$$e_n(f) \leqslant \frac{(n-k+1)!}{(n+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^k e_{n-k}(f^{(k)}) \leqslant \frac{(n-k+1)!}{(n+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^k ||f^{(k)}||_\infty.$$

Dowód. Dowodzimy nierówność 1. Niech $g(t) = f(\cos t)$. Wtedy $e_n(f) = E_n(g)$, bowiem dla $p \in P_{P_n}(f)$, $v \in P_{v_n}(g)$ zachodzi: skoro g jest parzysta, to v jest parzysta, czyli

$$v = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kt.$$

Wykonujemy rachunek

$$e_n(f) = ||f - p||_\infty = ||g(t) - p(\cos t)||_\infty \geqslant E_n(g) = ||g - v||_\infty = \\ \sup_{t\in[0,\pi]}\left|g(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kt\right| = \sup_{t\in[-1,1]}\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k \arccos x)\right| \geqslant e_n(f).$$

Teraz $\omega_f(\delta) = \sup\{|f(\cos t) - f(\cos s)| : |\cos t - \cos s| \leqslant \delta\} \geqslant w_g(s)$. Z nierówności Jacksona (trygonometrycznej) dostajemy tezę.
Zakładając nierówność 2 wykażemy teraz nierówność 3. Niech $p \in P_{P_{n-1}}(f')$ oraz

$$q(x) = \int_0^x p(t)dt.$$

Dalej, $||(f-q)'|| = ||f' - p|| = e_{n-1}(f')$, czyli $f - q$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $e_{n-1}(f')$ i z 2 mamy

$$e_n(f) = e_n(f-q) \leqslant e_{n-1}(f') \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

□

Polecane książki (te, których nie znam).
1. Chris Hul - 'A Basis Theory Primer'.
2. O. Chrystemen - 'An Introduction to Frames and Riesz Bases'.
3. E. W. Cheney - "Introduction to Approximation Theory'.
Przechodzimy do baz.

Definicja 31. *Ciąg elementów x_n przestrzeni Banacha X jest bazą Schaudera, jeżeli dla każdego $x \in X$ istnieje jednoznacznie wyznaczony ciąg skalarów a_n taki, że*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Stwierdzenie 32 (Operatory sum częściowych)**.** *Niech ciąg x_n będzie bazą w X. Dla $N = 1, 2, \ldots$ niech $P_N : X \mapsto X$*

$$P_N\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Wówczas $\sup_N ||P_N|| < \infty$ (ta liczba nazywa się stałą bazową).

Zanim udowodnimy to stwierdzenie, to wypunktujmy pewne własności P_N.

1. Operatory P_N są liniowe.
2. Dla każdego $x \in X$, $P_N(x) \to x$ przy $N \to \infty$.
3. $\dim P_N(X) = N$.
4. $P_N P_M = P_{\min(M,N)}$.

Możemy już przejść do dowodu stwierdzenia.
Określamy nową normę na X: $|||x||| = \sup_N ||P_N x||$. Pokażemy, że $(X, ||| \cdot |||)$ jest zupełna. Niech y_k będzie ciągiem Cauchy'ego w $||| \cdot |||$. Dla ustalonego N

$P_N y_k$ jest Cauchy'ego w $X_N = P_N(X)$ z $||\cdot||$. Stąd istnieje $z_N \in X_N$ spełniające $||P_N(y_k) - z_N|| \to 0$ przy $k \to \infty$. Zatem

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{k_0}{\exists}\ \underset{k,l\geqslant k_0}{\forall} ||P_N(y_l) - P_N(y_k)|| < \varepsilon.$$

Niech $u^N_{k,l} = P_N(y_l) - P_N(y_k)$. Dla $k,l \geqslant k_0$ zachodzi $\sup_N ||u^N_{k,l}|| < \varepsilon$. Mamy $u^N_{k,l} \to z_N - P_N(y_k)$ przy $l \to \infty$, więc $||z_N - P_N(y_k)|| \leqslant \varepsilon$ dla każdego N i $k \geqslant k_0$. Dalej,

$$||z_N - z_M|| \leqslant ||z_N - P_N y_k|| + ||P_N y_k - P_M y_k|| + ||P_M y_k - z_M|| < \varepsilon$$

dla $k \geqslant k_0$ i dostatecznie dużych N i M, czyli z_N jest ciągiem Cauchy'ego w $(X, ||\cdot||)$. Oznaczmy $z = \lim z_N$. Wówczas

$$\begin{aligned} P_N(z_M) = P_N\left(\lim_{k\to\infty} P_M y_k\right) &= \lim_{k\to\infty} P_N P_M y_k = \\ &= \lim_{k\to\infty} P_{\min(M,N)} y_k = z_{\min(N,M)}. \end{aligned}$$

Istnieje ciąg skalarów a_k taki, że $z_N = \sum_{k=1}^N a_k x_k$. Zatem $P_N(z) = z_N$ i

$$|||y^k - z||| = \sup_N ||P_N y_k - P_N z|| = \sup_N ||P_N y_k - z_N|| \to 0.$$

Rozważmy $Id : (X, |||\cdot|||) \mapsto (X, ||\cdot||)$ jest ciągłym, surjektywnym i różnowartościowym odwzorowaniem liniowym, gdyż

$$||Idx|| = ||x|| = \left|| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right|| = \lim_{N\to\infty} ||P_N x|| \leqslant \sup_N ||P_N x|| = |||x|||.$$

Id^{-1} też jest ciągła z twierdzenia o odwzorowaniu otwartym. To daje równoważność norm $|||\cdot|||$ i $||\cdot||$ na X. Stąd wynika teza stwierdzenia, gdyż $|||x||| \leqslant c||x||$, czyli $\sup_N ||P_N x|| \leqslant c||x||$, więc $||P_N|| \leqslant c$.

Wniosek 33. *Jeżeli x_n jest bazą w X, to dla $x = \sum a_n x_n$ niech $x_n^*(x) = a_n$. Wówczas $||x_n|| \cdot ||x_n^*|| \leqslant 2C$, gdzie C jest stałą bazową x_n.*

Dowód. Liczymy

$$|x_n^*(x)| = \frac{|a_n|||x_n||}{||x_n||} = \frac{||a_n x_n||}{||x_n||} = \frac{||P_n x - P_{n-1}x||}{x_n} \leqslant \frac{2C||x||}{||x_n||}.$$

□

Definicja 34. *Ciąg x_n^* nazywamy funkcjonałami biortogonalnymi dla bazy x_n. Każdy element $x \in X$ ma przedstawienie*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* x_n.$$

Stwierdzenie 35. *Jeżeli na X dane są ciągłe operatory liniowe P_N takie, że*

1. *Dla każdego $x \in X$ $P_N x \to x$ przy $N \to \infty$,*
2. $\dim P_N(X) = N$,
3. *Dla każdego N, M zachodzi $P_N P_M = P_{\min(N,M)}$,*

to każdy ciąg x_n taki, że $x_n \neq 0$, $x_1 \in P_1(X)$, $x_n \in P_n(X) \cap \ker P_{n-1}$ jest bazą Schaudera w X.

Dowód. Chcemy wykazać, że dla każdego $x \in X$ istnieje ciąg skalarów a_n taki, że dla każdego N zachodzi

$$P_N x = \sum_{n=1}^{N} a_n x_n.$$

$P_1 x = a_1 x_1$. Załóżmy, że $P_N x = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$. Trzepa pokazać, że $P_{N+1} x = P_N x + a_{n+1} x_{n+1}$. Przyjmijmy iż $P_{N+1} x = \widetilde{a_1} x_1 + \ldots + \widetilde{a_n} x_n + a_{n+1} x_{n+1}$. Mamy

$$P_N x = P_N(P_{N+1} x) = P_N(\widetilde{a_1} x_1 + \ldots + \widetilde{a_N} x_N) + a_{n+1} P_N x_{n+1} = \widetilde{a_1} x_1 + \ldots + \widetilde{a_N} x_N.$$

Stąd $\widetilde{a_i} = a_i$ dla $i = 1, \ldots, N$. Jednoznaczność a_n wynika z tego, że dla $x = \sum a_n x_n$ mamy $P_N x = \sum_{n=1}^{N} a_n x_n$. Niech $\varepsilon > 0$. Z ciągłości P_N istnieje $N_0 > N$ takie, że

$$||P_N \left(\sum_{n > N_0} a_n x_n \right)|| = ||z|| < \varepsilon.$$

Wówczas

$$P_N x = P_N \left(\sum_{n=1}^{N} a_n x_n \right) + \sum_{n=N+1}^{N_0} a_n P_N(x_n) + z = \sum_{n=1}^{N} a_n x_n + z.$$

co z dowolności ε kończy dowód. □

Przykłady.

1. Każdy ortogonalny układ zupełny w ośrodkowej przestrzeni Hilberta jest bazą Schaudera.
2. Wektory jednostkowe e_n są bazą w l_p dla $1 \leqslant p < \infty$ oraz w c_0.

Przypomnijmy, że układem Haara na $[0,1]$ nazywamy ciąg funkcji h_n określonych poprzez zapisanie $n = 2^j + k$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 2^j - 1$ wzorami $h_0(t) = 1$ oraz

$$h_n(t) = \begin{cases} -2^{\frac{j}{2}} \text{ dla } t \in (k2^{-j}, (2k+1)2^{-j-1}) \\ 2^{\frac{j}{2}} \text{ dla } t \in ((2k+1)2^{-j-1}, (k+1)2^{-j}) \\ 0 \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

Stwierdzenie 36. *Układ Haara jest bazą w $L_p[0,1]$ dla $1 \leqslant p < \infty$*

Dowód. Zauważmy, że $\mathrm{lin}(h_0, \dots, h_n)$ to przestrzeń funkcji stałych na każdym z przedziałów $(\frac{s}{2^{j+1}}, \frac{s+1}{2^{j+1}})$, $s = 0, 1, \dots, 2k+1$ i $(\frac{s}{2^j}, \frac{s+1}{2^j})$, $s = k+1, \dots, 2^j - 1$, gdzie $n = 2^j + k$. Stąd

$$\overline{\mathrm{lin}(h_n)_{n=0}^{\infty}} = L_p[0,1].$$

Niech S_n oznacza zbiór wszystkich przedziałów powyższej postaci jak wyżej. Wówczas

$$P_n f = \sum_{I \in S_n} \frac{1}{|I|} \left(\int_0^1 f(t)dt \right) \chi_I = \sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^1 f(t) h_n(t) dt \right) h_n.$$

Dalej,

$$||P_N f||_p^p \sum_{I \in S_N} \frac{1}{|I|^p} \left| \int_I f(t)dt \right|^p |I| \leqslant \sum |I|^{1-p} |I|^{\frac{p}{q}} \int_I |f|^p = \sum_{I \in S_N} \int |f|^p = ||f||_p^p.$$

Teraz,

$$||f - P_N f||_p \leqslant ||f - g|| + ||P_N g - P_N f|| \leqslant ||f - g||(1 + ||P_N||) \leqslant 2\varepsilon,$$

gdzie $g \in \mathrm{lin}(h_n)$, $||f - g||_p \leqslant \varepsilon$. □

Stwierdzenie 37. *Istnieje baza Schaudera w $C[0,1]$.*

Dowód. Zobacz w Wojtaszczyku. □

Przypomnijmy bazę **Fabera Schaudera** w $C[0,1]$. Mamy ciąg punktów dla $n = 2^k + l$

$$t_0 = 1, \ t_k = \frac{2l+1}{2^{k+1}}$$

i odpowiadający ciąg funkcji $f_{-1} \equiv 0$, $f_0(x) = x$,

$$f_k(t_j) = \begin{cases} 1 \text{ dla } k = j \\ 0 \text{ dla } k < j \\ \text{liniowo ciągła w p. p.} \end{cases}$$

Twierdzenie 38. *Załóżmy, że $f \in C[0,1]$, $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$. Następujące warunki są równoważne*

1. *f spełnia warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha \in (0,1)$.*
2. *$a_n = O(n^{-\alpha})$*
3. *$\mathrm{dist}(f, \mathrm{lin}(f_{-1}, f_0, \dots, f_n)) = O(n^{-\alpha})$*

Dowód. Funkcjonały bioortogonalne mają postać $a_{-1} = f(0)$, $a_0 = f(1) - f(0)$, $a_n f(t_n) - \frac{1}{2}(f(t_r) - f(t_s))$, $t_r < t_n$, $t_s > t_n$ i pomiędzy t_r i t_{nm} oraz t_n i t_s nie ma punktów t_k. Przechodzimy do dowodu. $1 \Rightarrow 2$. Korzystając z warunku Höldera i postaci funkcjonałów biortogonalnych dla $n = 2^k + l$ mamy

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2}|f(t_n) - f(t_r)| + \frac{1}{2}|f(t_r) - f(t_s)| \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{Lip}_\alpha(f)(|t_n - t_r|^\alpha + |t_r - t_s|^\alpha)$$
$$\leqslant C\mathrm{Lip}_\alpha(f)\left(\frac{1}{2^j}\right)^\alpha \leqslant C\mathrm{Lip}_\alpha(f)\frac{1}{n^\alpha}.$$

$2 \Rightarrow 3$. Niech $S_n = \mathrm{lin}(f_{-1}, f_0, \ldots, f_n) \subset C[0,1]$. Mamy

$$\mathrm{dist}(f, S_n) \leqslant ||f - \sum_{k=1}^{n} a_k f_k||_\infty = ||\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k f_k||_\infty \leqslant$$
$$||\sum_{k=n+1}^{2^{j+1}-1} a_k f_k||_\infty + \sum_{r=j+1}^{\infty} ||\sum_{k=2^r}^{2^{r+1}-1} a_k f_k||_\infty \leqslant$$
$$\leqslant \max_{n+1\leqslant k\leqslant 2^{j+1}} |a_k| + \sum_{r=j+1}^{\infty} \max_{2^r\leqslant k\leqslant 2^{r+1}-1} |a_k| \leqslant C(2^{j+1}-1)^{-\alpha} + \sum_{r=j+1}^{\infty} C(2^{r+1}-1)^{-\alpha}$$
$$\leqslant C\left(2^{-\alpha(j+1)+\sum_{r=j+1}^{\infty} 2^{-\alpha(r+1)}}\right) \leqslant C2^{-\alpha(j+1)}\left(\sum_{r=0}^{\infty} 2^{-\alpha r}\right) \leqslant C2^{-\alpha j} \leqslant C\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha.$$

Będziemy potrzebować następującego ćwiczenia.

$$\underset{C>0}{\exists}\ \underset{n\geqslant 1}{\forall}\ \underset{g\in S_n}{\forall}\ \underset{x,y\in[0,1]}{\forall} |g(x) - g(y)| \leqslant Cn||g||_\infty|x-y|.$$

Niech P_n oznaczają sumy częściowe dla bazy Fabera - Schaudera, czyli P_n to rzut na S_n. Dla $g_n \in P_{S_n}(f)$ zachodzi

$$||f - P_n f||_\infty = ||f - g_n + P_n g_n - P_n f||_\infty \leqslant ||f - g_n|| + ||P_n||||f - g_n|| \leqslant C\mathrm{dist}(f, S_n),$$

więc $||f - P_n f||_\infty \leqslant \frac{C}{n^\alpha}$. Teraz szacujemy

$$||P_{2^{j+1}} f - P_{2^j} f|| \leqslant ||P_{2^{j+1}} f - f|| + ||P_{2^j} f - f|| \leqslant \frac{C}{2^{j\alpha}}.$$

Niech $x, y \in [0,1]$, $k \in \mathbb{N}$ będą takie, że $\frac{1}{2^{k+1}} \leqslant |x-y| \leqslant \frac{1}{2^k}$. Z poprzedniego mamy $||f - P_{2^k} f|| \leqslant \frac{C}{2^{\alpha k}} \leqslant C|x-y|^\alpha$. Korzystając ze znanej sztuczki otrzymujemy

$$|(P_{2^k} f)(x) - (P_{2^k} f)(y)| \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} |(P_{2^{j+1}} f - P_{2^j} f)(x) - (P_{2^{j+1}} f - P_{2^j} f)(y)| +$$
$$+|(P_1 f - P_0 f)(x) - (P_1 f - P_0 f)(y)| + |(P_0 f - P_{-1} f)(x) - (P_0 f - P_{-1} f)(y)|.$$

Korzystając z ćwiczenia ostatnie wyrażenie możemy oszacować przez

$$\sum_{j=1}^{k-1} C2^{j+1}||P_{2^{j+1}}f - P_{2^j}f||_\infty |x-y| + C||P_1 f - P_0 f||_\infty |x-y| + C||P_0 f|||x-y|$$

$$\leqslant C\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{2^{j\alpha}} 2^j |x-y| = C\sum_{j=0}^{k} 2^{j(1-\alpha)}|x-y|^{1-\alpha}|x-y|^\alpha \leqslant$$

$$\leqslant C(\sum_{j=0}^{k} 2^{j(1-\alpha)}2^{-k(1-\alpha)})|x-y|^\alpha = C\left(\sum_{j=0}^{k} 2^{-j(1-\alpha)}\right)|x-y|^\alpha \leqslant \widetilde{C}|x-y|^\alpha.$$

Na koniec, $|f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)-(P_{2^k}f)(x)| + |(P_{2^k}f)(x)-(P_{2^k}f)(y)| + |(P_{2^k f})(y)-f(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha$. □

Przechodzimy do **układu Franklina**.
Niech φ_n będzie układem funkcji powstałych w wyniku ortonormalizacji Grama - Schmidta w $L_2[0,1]$ układu Fabera - Schaudera. Zacznijmy od pomocniczego stwierdzenia.

Stwierdzenie 39. *Niech* $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = 1$, $S \subset C[0,1]$ *- funkcje ciągłe liniowe na* $[s_k, s_{k+1}]$, $\Lambda_k \in S$ *jest zadane przez warunki* $\Lambda_k(s_j) = \delta_{k,j}$, $\delta_k = s_k - s_{k-1}$. *Wówczas*

1. $\{\Lambda_k\}_{k=0}^n$ *jest bazą* S.
2. *Macierz Grama układu ma postać trójdiagonalną.*

Stwierdzenie 40. *Niech* $P : L^2[0,1] \mapsto L^2[0,1]$ *będzie rzutem ortogonalnym na* S. *Wówczas* P *jest ciągłym operatorem liniowym na* $C[0,1]$ *i* $||Pf||_\infty \leqslant 3||f||_\infty$.

Dowód. P jest dobrze określone i $Pf \in C[0,1]$. Istnieją funkcjonały liniowe $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ na $C[0,1]$ takie, że

$$Pf = \sum_{i=0}^{n} \xi_i(f)\Lambda_i,$$

co więcej $||Pf||_\infty = \max_i|\xi_i(f)|$. Teraz liczymy

$$|<\Lambda_j, f>| = |<\Lambda_j, Pf>| = |<\Lambda_j, \sum_{i=0}^{n}\xi_i(f)\Lambda_i>| =$$

$$= |\xi_{j-1}(f)<\Lambda_j,\Lambda_{j-1}> + \xi_j(f)<\Lambda_j,\Lambda_j> + \xi_{j+1}<\Lambda_j,\Lambda_{j+1}>| =$$

$$= |\xi_{j-1}(f)\frac{\delta_j}{6} + \xi_j(f)<\Lambda_j,\Lambda_j> + \xi_{j+1}(f)<\Lambda_j,\Lambda_{j+1}>| =$$

$$= |\xi_{j-1}(f)\frac{\delta_j}{6} + \xi_j(f)\frac{\delta_j+\delta_{j+1}}{3} + \xi_{j+1}(f)\frac{\delta_{j+1}}{6}.$$

Zatem

$$|<\Lambda_j, f>| \geqslant |\xi_j(f)|\frac{\delta_j+\delta_{j+1}}{3} - |\xi_{j-1}(f)\frac{\delta_j}{6} + \xi_{j+1}\frac{\delta_{j+1}}{6}.$$

Dla j takiego, że $|\xi_j(f)| = ||Pf||_\infty$ mamy $| < \Lambda_j, f > | \geqslant ||Pf||_\infty \frac{\delta_j+\delta_{j+1}}{3} - ||Pf||_\infty \frac{\delta_j+\delta_{j+1}}{6} = ||Pf||_\infty \frac{\delta_j+\delta_{j+1}}{6}$. Ostatecznie, $||Pf||_\infty \frac{\delta_j+\delta_{j+1}}{6} \leqslant | < \Lambda_j, f > | \leqslant ||f||_\infty ||\Lambda_j||_1 = ||f||_\infty \frac{\delta_j+\delta_{j+1}}{2}$, czyli $||Pf||_\infty \leqslant 3||f||_\infty$.

Twierdzenie 41. *Układ Franklina jest bazą Schaudera w $C[0,1]$ z funkcjonałami biortogonalnymi*

$$\varphi_n^*(f) = \int_0^1 f(t)\varphi_n(t)dt.$$

Dowód. To wynika z poprzedniego stwierdzenia. Istotnie, niech P_n będzie rzutem ortogononalnym na S_n. Wówczas,

$$||f - P_n f|| = ||f - g_n + P_n g_n - f|| \leqslant ||f - g_n|| + ||P_n|| ||f - g_n|| \leqslant 4\text{dist}(f, S_n).$$

□

Dążymy teraz do dowodu faktu, iż układ trygonometryczny jest bazą w $L_p[0, 2\pi]$.

Twierdzenie 42 (Riesz - Thorin)**.** *Niech $1 \leqslant p_1, p_2, q_1, q_2 \leqslant \infty$. Niech T będzie liniowym operatorem określonym na $L_{p_1}(\mu)L_{q_1}(\mu)$ o wartościach w zbiorze funkcji mierzalnych na Ω. Załóżmy, że $T \in (L_{p_1}(\mu), L_{p_2}(\nu))$ oraz $T \in (L_{q_1}(\mu), L_{q_2}(\nu))$. Wówczas, dla dowolnego $\theta \in (0,1)$ i*

$$\frac{1}{r_1} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{q_1}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{\theta}{p_2} + \frac{1-\theta}{q_2}$$

mamy $T \in L(L_{r_1}(\mu), L_{r_2}(\mu))$ i

$$||T||_{L(L_{r_1}, L_{r_2})} \leqslant ||T||^\theta_{L(L_{p_1}, L_{p_2})} \cdot ||T||^{1-\theta}_{L(L_{q_1}, L_{q_2})}.$$

Użyjemy **rzutów Riesza**. Niech $V = \text{lin}\{e^{ikt} : k \in \mathbb{Z}\}$, $U = \text{lin}\{e^{ikt} : k = 1, 2, \ldots\}$. Niech $R : V \mapsto U$ będzie określony wzorem

$$R\left(\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{ikt}.$$

Lemat 43. *Niech $p = 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$. Istnieje stała $K_p < \infty$ taka, że dla $f \in U$, $u = \text{Re} f$, $v = \text{Im} f$ zachodzi $||u||_p \leqslant K_p ||v||_p$.*

Dowód. Robimy indukcję po k. Dla $p = 2$ mamy $||u||_2 = ||v||_2$. Załóżmy, że teza jest prawdziwa dla $p = 2^k$. Niech $f \in L_{2p}$. Wtedy $f^2 \in L_p$ i $||f^2||_p = ||f||^2_{2p}$. Dalej, mamy $f^2 = u^2 - v^2 + 2i(uv)$ oraz

$$||u^2||_p \leqslant ||u^2 - v^2||_p + ||v^2||_p \leqslant 2K_p||uv||_p + ||v^2||_p \leqslant ||v^2||_p + 2K_p||u||_{2p}||v||_{2p}.$$

Stąd

$$\frac{||u||^2_{2p}}{||v||^2_{2p}} \leqslant 1 + 2K_p \frac{||u||_{2p}}{||v||_{2p}}.$$

Zatem przyjmując $t = \frac{||u||_{2p}}{||v||_{2p}}$ otrzymamy

$$t^2 - 2K_p t - 1 \leqslant \Rightarrow t \leqslant K_p + \sqrt{K_p^2 + K_p}.$$

$\square$

Twierdzenie 44. *Operator R (rzut Riesza) jest ograniczony w $L_p[0, 2\pi]$ dla $1 < p < \infty$.*

Dowód. Najpierw dla $p = 2^k$. Niech $h = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt} \in V$. Załóżmy tymczasowo, że $a_0 = 0$. Możemy napisać $h = \sum_{k=-n}^{1} a_k e^{ikt} + \sum_{k=1}^{n} a_k e^{ikt}$,

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} (a_k \overline{a_k}) e^{ikt} = u + iv$$
$$\psi = \sum_{k=1}^{n} (a_k - \overline{a_k}) e^{ikt} = r + is.$$

Stąd $h = u + is$. Dalej, zauważmy że $r + iv = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{ikt} - \sum_{k=-n}^{-1} a_k e^{ikt}$. Szacujemy z lematu

$$||r + iv||_p \leqslant ||r||_p + ||v||_p \leqslant K_p(||s||_p + ||u||_p) \leqslant 2K_p ||h||_p.$$

Niech $f = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{ikt}$, $g = \sum_{k=-n}^{-1} a_k e^{ikt}$. Z poprzednich rachunków dostajemy $||f - g||_p \leqslant 2K_p ||f + g||_p$, czyli

$$||f||_p \leqslant \frac{1}{2}||f - g||_p + \frac{1}{2}||f + g||_p \leqslant (K_p + \frac{1}{2})||f + g||_p.$$

R jest ciągły na V, więc na L_{2^k}. Z twierdzenia Riesza - Thorina R jest ciągły na L_p dla $2 \leqslant p < \infty$. Ponieważ $R = R^*$, to R jest ciągły na L_p dla $1 < p \leqslant 2$. $\square$

Twierdzenie 45. *Układ trygonometryczny $(1, e^{it}, e^{-it}, \ldots)$ jest bazą Schaudera w $L_p[0, 2\pi]$ dla $1 < p < \infty$.*

Dowód. Układ ten jest liniowo gęsty w $L_p[0, 2\pi]$. Trzeba pokazać, że

$$\exists_{C_p} \forall_{0 \leqslant m < n} || \sum_{k=-m}^{m} a_k e^{ikt} ||_p \leqslant C_p || \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt} ||_p.$$

$f \mapsto e^{int} f$ jest izometrią w $L_p[0, 2\pi]$. Zatem

$$|| \sum_{k=m+1}^{n} a_k e^{ikt} ||_p = || \sum_{k=0}^{n-m-1} a_{k+m+1} e^{ikt} ||_p \leqslant$$
$$||R||_{L(L_p, L_p)} || \sum_{k=-m-1}^{n-m-1} a_{k+m+1} e^{ikt} || = ||R||_{L(L_p, L_p)} || \sum_{k=0}^{n} a_k e^{ikt} ||.$$

Zatem

$$||\sum_{k=0}^{m} a_k e^{ikt}||_p \leqslant ||\sum_{k=0}^{n} a_k e^{ikt}|| + ||\sum_{k=m+1}^{n} a_k e^{ikt}|| \leqslant$$
$$(1 + ||R||_{L(L_p,L_p)})||\sum_{k=0}^{n} a_k e^{ikt}|| \leqslant C_p||\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}||.$$

Podobnie szacujemy drugi składnik, a stąd teza. □

Przechodzimy do zbieżności bezwarunkowej.

Definicja 46. *Szereg $\sum x_n$ jest zbieżny bezwzględnie, jeśli $\sum ||x_n|| < \infty$. Ten sam szereg jest zbieżny bezwarunkowo, gdy dla każdej bijekcji $\sigma : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ szereg $\sum x_{\sigma(n)}$ jest zbieżny.*

Twierdzenie 47. *Niech $(X, ||\cdot||)$ będzie przestrzenią Banacha, $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Następujące warunki są równoważne.*

1. *$\sum_n x_n$ jest zbieżny bezwarunkowo.*
2. *$\sum_n a_n x_n$ jest zbieżny dla dowolnego $(a_n) \in l^\infty$.*
3. *$\sum_n \varepsilon_n x_n$ jest zbieżny dla $\varepsilon_n = \pm 1$.*
4. *Operator $T : c_0 \mapsto X$ taki, że $Te_n = x_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$ jest zwarty.*
5. *Dla każdego rosnącego ciągu indeksów $\sum_k x_{n_k}$ jest zbieżny.*

Dowodzimy 3 ⇒ 2. Niech $V_N = \sum_{n=1}^N a_n e_n$. Wówczas ciąg (V_N) jest słabo Cauchy'ego w c_0, bo dla $\varphi = (c_n) \in l^1$ mamy

$$|\varphi(V_N) - \varphi(V_M)| = \left|\sum_{n=M+1}^{N} a_n c_n\right| \leqslant ||a||_\infty \sum_{n=M+1}^{N} |c_n|.$$

Ze zwartości T dostajemy $T(V_N)$ jest zbieżny w normie X. Implikacja 2 ⇒ 5 jest oczywista. Dla dowodu 5 ⇒ 3 wybieramy n_k tak, aby $\varepsilon_{n_k} = 1$ i $\varepsilon_n = -1$ dla $n \neq n_k$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n = 2\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k} - \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Przechodzimy do 3 ⇒ 5. Niech $\gamma = \gamma_n \in c_0$, $||\gamma||_\infty \leqslant 1$, $\gamma_n \neq 0$ dla skończeniu wielu n. Ciąg $(\gamma_n)_{n:\gamma_n \neq 0}$ można przedstawić jako kombinację wypukłą ciągów o wyrazach ± 1 (to są wierzchołki kuli jednostkowej w $(\mathbb{R}^N, ||\cdot||_\infty)$. Niech $T : c_0 \mapsto X$, $Te_n = x_n$ oraz $\gamma = \sum_{n=N}^M \gamma_n e_n \in c_0$ i $\gamma = \sum_{k=1}^K c_k \alpha^{(k)}$, gdzie $\sum_{k=1}^K c_k = 1$, $c_k \geqslant 0$ oraz $\alpha^{(k)} = \sum_{n=N}^M \varepsilon_n^{(k)} e_n$ dla $\varepsilon_n^{(k)} \in \{-1, 1\}$. Teraz $T\gamma = \sum_{k=1}^K c_k T\alpha^{(k)}$ i stąd

$$||T\gamma|| \leqslant \sum_k c_k ||T\alpha^{(k)}|| \leqslant \sup_{\varepsilon_n = \pm} ||\sum_{n=N}^{M} \varepsilon_n x_n|| \leqslant \sup_{\varepsilon_n = \pm} ||\sum_{n=N}^{\infty} \varepsilon_n x_n||.$$

Pokażemy, że

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\varepsilon_n=\pm} || \sum_{n\geqslant N} \varepsilon_n x_n || = 0.$$

Załóżmy przeciwnie, czyli

$$\limsup_{N\to\infty} \sup_{\varepsilon_n=\pm} || \sum_{n\geqslant N} \varepsilon_n x_n || = \beta > 0.$$

Istnieje takie N_1 i $\varepsilon^1_{N_1}, \varepsilon^1_{N_1+1}, \ldots = \pm 1$, że

$$|| \sum_{n\geqslant N_1} \varepsilon^1_n x_n || > \frac{\beta}{2}.$$

Z drugiej strony istnieje r_1 takie, że

$$|| \sum_{n>N_1+r_1} \varepsilon^1_n x_n || < \frac{\beta}{4}$$

oraz

$$|| \sum_{n=N_1}^{N_1+r_1} \varepsilon^1_n x_n || > \frac{\beta}{4}.$$

Następnie znajdujemy $N_2 > N_1 + r_1$ oraz r_2 i $\varepsilon^2_n = \pm$ taka, że

$$|| \sum_{n=N_2}^{N_2+r_2} \varepsilon^2_n x_n || > \frac{\beta}{4}.$$

Niech $\varepsilon_n = \varepsilon^k_n$ dla $n = N_k, \ldots, N_k + r_k$ i 0 w przeciwnym przypadku. Zatem szereg $\sum \varepsilon_n x_n$ jest zbieżny, ale nie spełnia warunku Cauchy'ego. Implikacja $4 \Rightarrow 1$. Permutacja $\sigma : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ zadaje izometrię I_σ przestrzeni c_0. Stąd $T \circ I_\sigma$ jest zwarty z c_0 do X i spełnia $(T \circ I_\sigma)(e_n) = x_{\sigma(n)}$ Z udowodnionej wcześniej implikacji $4 \Rightarrow 2$ wynika, że szereg $\sum_n x_{\sigma(n)}$ jest zbieżny. Pozostał jeszcze dowód implikacji $1 \Rightarrow 5$. Załóżmy, że 5 nie zachodzi, czyli

$$\exists_{\varepsilon>0} \exists_{n_k} \exists_{(N_\delta)_{\delta=0}^{\infty}} || \sum_{k=N_\delta+1}^{N_{\delta+1}} x_{n_k} || > \varepsilon.$$

Niech $N \backslash \{n_k\} = \{m_1, m_2, \ldots\}$, $m_i < m_{i+1}$ oraz $\sigma : (1, 2, \ldots) \mapsto (n_1, \ldots w, n_{k_{N_1}}, m_1, n_{k_{N_1+1}}, \ldots, n_{k_{N_2}}, m_2, \ldots$ czyli szereg $\sum_n x_{\sigma(n)}$ jest zbieżny, ale nie spełnia warunku Cauchy'ego. $\square$

Twierdzenie 48. *Jeżeli szereg $\sum x_n$ jest zbieżny bezwarunkowo, to dla każdej permutacji $\sigma : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ mamy*

$$\sum_n s_{\sigma(n)} = \sum_n x_n.$$

Dowód. Niech $\sum x_n$ będzie zbieżny bezwarunkowo do x. Pokażemy, że

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{F_0 \subset \mathbb{N}} \forall_{F_0 \subset F} ||x - \sum_{n \in F} x_n|| < \varepsilon.$$

Przypuśćmy, że tak nie jest, czyli

$$\exists_{\varepsilon>0} \forall_{F_0 \subset \mathbb{N}} \exists_{F \subset F_0} ||x - \sum_{n \in F} x_n|| \geqslant \varepsilon.$$

Ze zbieżności x_n istnieje $M_1 > 0$ takie, że dla każdego $N \geqslant M_1$ zachodzi

$$||x - \sum_{n=1}^{N} x_n|| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Niech $F_1 = \{1, 2, \ldots, M_1\}$. Z założenia istnieje $F_1 \subset G_1$ takie, że

$$||x - \sum_{n \in G_1} x_n|| \geqslant \varepsilon.$$

Niech $M_2 = \max G_1$ oraz $F_2 = \{1, 2, \ldots, M_2\}$. Otrzymujemy ciąg skończonych podzbiorów

$$F_1 \subset G_1 \subset F_2 \subset G_2 \subset \ldots$$

takie, że

$$||x - \sum_{n \in F_N} x_n|| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ i } ||x - \sum_{n \in G_N} x_n|| \geqslant \varepsilon.$$

Zatem

$$|| \sum_{n \in G_N \setminus F_N} x_n|| = || \sum_{n \in G_N} - \sum_{n \in F_N} x_n|| \geqslant$$

$$||x - \sum_{n \in G_N} x_n|| - ||x - \sum_{n \in F_N} x_n|| \geqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2},$$

a więc $\#G_N > \#F_N$. Definiujemy $\widetilde{\sigma} : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ i ustawiamy kolejno elementy $F_1, G_1 \setminus F_1, F_2 \setminus G_1, \ldots$. Mamy

$$|| \sum_{n=\#F_N+1}^{\#G_N} x_{\widetilde{\sigma(n)}}|| = || \sum_{n \in G_N \setminus F_N} x_n|| \geqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

czyli $\sum x_{\widetilde{\sigma(n)}}$ nie spełnia warunku Cauchy'ego. Weźmy teraz $\varepsilon > 0$ i $F_0 \subset \mathbb{N}$ takie, że dla $F_0 \subset F$ zachodzi

$$||n - \sigma_{n \in F} x_n|| < \varepsilon,\ N_0 \in \mathbb{N} \text{ takie, że}$$

$F_0 \subset \{\sigma(1), \ldots, \sigma(N_0)\}$, $N \geqslant N_0$, $F = \{\sigma(1), \ldots, \sigma(N)\}$. Teraz

$$||x - \sum_{n=1}^{N} x_{\sigma(n)}|| = ||x - \sum_{n \in F} x_n|| < \varepsilon,$$

więc $\sum x_{\sigma(n)} = x$. $\square$

Definicja 49. *Baza Schaudera x_n z funkcjonałami biortogonalnymi x_n^* jest bazą bezwarunkową, jeżeli dla każdego $x \in X$ szereg $\sum x_n^*(x)x_n$ jest zbieżny bezwarunkowo do x.*

Przykład 2.

- *Bazy ortonormalne w przestrzeniach Hilberta.*
- *Baza e_n w l_p dla $1 < p < \infty$.*

Twierdzenie 50. *Niech $x_n \subset X$. Następujące warunki są równoważne*

1. *x_n jest bazą bezwarunkową w X.*
2. *Dla dowolnej permutacji $\sigma : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ układ $x_{\sigma(n)}$ jest bazą Schaudera w X.*

Dowód. $1 \Rightarrow 2$. Niech x_n^* będzie układ biortogonalnym. Wówczas dla każdego $x \in X$ zachodzi

$$x = \sum_n x_n^* x_n = \sum_n x_{\sigma(n)}^*(x)x_{\sigma(n)}.$$

Trzeba pokazać, że jeśli $x = \sum c_n x_{\sigma(n)}$, to $c_n = x_{\sigma(n)}^*(x)$. To jest jasne, bo $x_{\sigma(n)}^* = c_n \cdot 1$. Przechodzimy do dowodu implikacji $2 \Rightarrow 1$. Niech x_n^* będzie układem biortogonalnym do bazy Schaudera x_n. Musimy pokazać, że szereg $\sum x_n^*(x)x_n$ zbiega do x bezwarunkowo dla dowolnego $x \in X$. Niech $\sigma : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ będzie dowolną permutacją. Wówczas $x = \sum c_n x_{\sigma(n)}$, ale $x_{\sigma(n)}^*(x) = c_n$. Zatem szereg $\sum x_{\sigma(n)}^*(x)x_{\sigma(n)}$ zbiega dla dowolnej permutacji σ. □

Niech x_n, x_n^* będzie bazą bezwarunkową oraz $f \subset \mathbb{N}$ będzie zbiorem skończonym. Przyjmijmy oznaczenia

$$S_F(x) = \sum_{n \in F} x_n^*(x)x_n,$$

$$S_{F,\varepsilon}(x) \sum_{n \in F} \varepsilon_n x_n^*(x)x_n, \text{ dla } \varepsilon_n = \pm 1,$$

$$S_{F,\Lambda} \sum_{n \in F} \lambda_n x_n^*(x)x_n \text{ dla } \Lambda = (\lambda_n)_{n \in F},\ |\lambda_n| \leqslant 1.$$

Fakt 51. *Dla dowolnego $x \in X$ prawdą jest, iż*

1. *$|||x||| = \sup_F ||S_F(x)||$, $|||x|||_\varepsilon = \sup_{F,\varepsilon} ||S_{F,\varepsilon}(x)||$, $|||x|||_\Lambda = \sup_{F,\Lambda} ||S_{F,\Lambda}(x)||$ są skończone.*
2. *$K = \sup_F ||S_F||$, $K_\varepsilon = \sup_{F,\varepsilon} ||S_{F,\varepsilon}||$, $K_\Lambda = \sup_{F,\Lambda} ||S_{F,\Lambda}||$ są skończone.*
3. *$|||x||| \leqslant |||x|||_\varepsilon \leqslant 2|||x|||$ i $K \leqslant K_\varepsilon \leqslant 2K$.*
4. *Gdy X jest przestrzenią nad $\mathbb{R}$, to $|||x|||_\varepsilon = |||x|||_\Lambda$ oraz $K_\varepsilon = K_\Lambda$.*
5. *Gdy X jest przestrzenią nad $\mathbb{C}$, $|||x|||_\varepsilon \leqslant |||x|||_\Lambda \leqslant 2|||x|||_\varepsilon$ i $K_\varepsilon \leqslant K_\Lambda \leqslant 2K_\varepsilon$.*
6. *Normy $||| \cdot |||$, $||| \cdot |||_\varepsilon$, $||| \cdot |||_\Lambda$ są równoważne z normą wyjściową.*

Twierdzenie 52. *Niech x_n będzie liniowo gęstym układem wektorów w X. Następujące warunki są równoważne.*

1. *x_n jest bazą bezwarunkową.*
2. *Istnieje stała C_2 taka, że dla każdego $N \in \mathbb{N}$ i dla dowolnego skończonego układu liczb $a_1, \ldots, a_N$, $b_1, \ldots, b_N$ zachodzi*
$$||\sum_{n=1}^{N} a_n x_n|| \leqslant C_2 ||\sum_{n=1}^{N} b_n x_n||.$$
3. *Istnieje stała C_3 taka, że dla każdego skończonych zbiorów $F, G \subset \mathbb{N}$, $F \subset G$ i skalarów c_n zachodzi*
$$||\sum_{n \in F} c_n x_n|| \leqslant C_3 ||\sum_{n \in G} c_n x_n||.$$
4. *Istnieje stała C_4 taka, że dla każdego $N \in \mathbb{N}$ oraz skalarów $d_1, \ldots d_N$ i znaków $\varepsilon_n = \pm 1$ zachodzi*
$$||\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n d_n x_n|| \leqslant C_4 ||\sum_{n=1}^{N} d_n x_n||.$$

Dowód. $1 \Rightarrow 2$. Niech
$$x = \sum_{n=1}^{N} b_n x_n, \ \ x_n^*(x) = b_n$$
i weźmy λ_n takie, że $a_n = \lambda_n b_n$, $|\lambda_n| \leqslant 1$. Dla $F \subset \{1, \ldots, N\}$ i $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, a więc
$$\sum_{n=1}^{N} a_n x_n = S_{F,\Lambda}(x).$$
Zatem
$$||\sum_{n=1}^{N} a_n x_n|| = ||S_{F,\Lambda}(x)|| \leqslant K_\Lambda ||x||.$$
$2 \Rightarrow 3$ Weźmy w warunku 2 $N = \max G$. Określmy ciąg $b_n = c_n$ dla $n \in G$ i zero poza tym, a także ciąg $a_n = c_n$ dla $n \in F$ i 0 poza tym. Czas na implikację $3 \Rightarrow 4$. Niech $F_+ = \{n : \varepsilon_n = 1\}$ oraz $F_- = \{n : \varepsilon_n = -1\}$. Mamy
$$||\sum_{n} \varepsilon_n d_n x_n|| \leqslant ||\sum_{n \in F_+} d_n x_n|| + ||\sum_{n \in F_-} d_n x_n|| \leqslant 2C_3 ||\sum_{n} d_n x_n||.$$
Niedokończone □

Z 2 wynika wniosek.

Wniosek 53. *Jeżeli x_n, x_n^* jest bazą bezwarunkową w X, to istnieje stała C taka, że dla każdego $x \in X$ i dowolnego ciągu $\Lambda = (\lambda_n)_n \subset l^\infty$ zachodzi*

$$||\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n^*(x) x_n|| \leqslant C||\Lambda||_\infty ||x||.$$

Fakt 54. *Niech $1 < p < \infty$, a_k, b_k będą ciągami takimi, że $|b_k| \leqslant |a_k|$. Wówczas dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy*

$$||\sum_{k=0}^{N} b_k h_k||_p \leqslant \left(\max(p, \frac{p}{p-1}) - 1\right) ||\sum_{k=0}^{n} a_k h_k||_p.$$

Lemat 55. *Niech $v(x,y) = |y|^p - (p-1)^p |x|^p$. Istnieje funkcja $u : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ taka, że dla $a, b, x, y \in \mathbb{C}$, $|b| \leqslant |a|$:*

1. *$v(x,y) \leqslant u(x,y)$,*
2. *$u(x,y) = u(-x,-y)$,*
3. *$u(0,0) = 0$,*
4. *$u(x+a, y+b) + u(x-a, y-b) \leqslant 2u(x,y)$.*

$u(x,y) = p(1-\frac{1}{p})^{p-1}(|x|+|y|)^{p-1}(|y|-(p-1)|x|)$.

Twierdzenie 56. *Układ Haara jest bazą bezwarunkową w $L_p[0,1]$ dla $1 < p < \infty$.*

Zajmiemy się teraz związkiem aproksymacji z bazami Schaudera.
Niech $(X, ||\cdot||)$ będzie przestrzenią Banacha oraz x_n będzie w niej bazą Schaudera. Przyjmijmy

$$S_n = \mathrm{lin}(x_1, \ldots, x_n).$$

Wtedy dla każdego $f \in X$ zachodzi

- $\mathrm{dist}(f, S_n) \to 0$
- Dla $f_n \in S_n$,
$$f_n = \sum_{k=1}^{n} x_k^*(f) x_k \to f.$$
- $||f - f_n|| \leqslant C\mathrm{dist}(f, S_n)$.

Omówimy teraz zagadnienie aproskymacji nieliniowej (n - członowa).

$$\sigma_n = \{a_i x_{i_1} + \ldots + a_n x_{i_n} : i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}\}.$$

Wówczas $\mathrm{dist}(f, \sigma_n) \to 0$, $a_n = x_n^*(f)$. Niech $\sigma : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ będzie permutacją taką, że

$$|a_{\Sigma(1)}| \geqslant |a_{\sigma(2)}| \geqslant \ldots \geqslant |a_{\sigma(n)}| \geqslant \ldots.$$

Niech $\Lambda_n = \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}$ oraz

$$G_n(f) = \sum_{k \in \Lambda_n} a_k x_k \in \Sigma_n.$$

Rozważamy następujące problemy.

- Czy $G_n(f) \to f$?
- Czy $||f - G_n(f)|| \leqslant C \mathrm{dist}(f, \Sigma_n)$?

Definicja 57. *Bazę x_n w przestrzeni Banacha X nazwiemy bazą zachłanną, jeżeli*

$$\exists_{C<\infty} \forall_{f \in X} \forall_{n \in \mathbb{N}} ||f - G_n(f)|| \leqslant C \mathrm{dist}(f, \Sigma_n).$$

Definicja 58. *Bazę x_n nazwiemy demokratyczną, jeżeli*

$$\exists_{D<\infty} \forall_{A,B \subset \mathbb{N}} ||\sum_{k \in A} x_k|| \leqslant D ||\sum_{k \in B} x_k|| \ A, B \text{ - skończone i równej mocy}$$

Twierdzenie 59 (Konyagin,Temlyakov,1999)**.** *Baza x_n jest zachłanna wtedy i tylko wtedy, gdy jest bezwarunkowa i demokratyczna.*

Dowód. $\Leftarrow$ Niech $x \in X$ oraz $\sigma : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ będzie permutacją taką, że

$$|x^*_{\sigma(1)}(x)| \geqslant |x^*_{\sigma(2)}| \geqslant \ldots.$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dla $A \subset \mathbb{N}$ niech

$$S_A(x) = \sum_{k \in A} x^*_k(x) x_k.$$

Weźmy $P_m \subset \mathbb{N}$, $\#P_m = m$ oraz

$$Q_m(x) = \sum_{k \in P_m} b_k x_k$$

takie, że

$$||x - Q_m(x)|| \leqslant \mathrm{dist}(x, \Sigma_n) + \varepsilon.$$

Dalej,

$$G_m(x) = \sum_{k \in \Lambda_m} x^*_k(x) x_k = S_{\Lambda_m}(x).$$

Szacujemy

$$\begin{aligned} ||x - G_m(x)|| \leqslant ||x - S_{P_m}(x)|| + ||S_{P_m}(x) - S_{\Lambda_m}(x)|| = \\ ||x - S_{P_m}(x)|| + ||S_{P_m \setminus \Lambda_m}(x) - S_{\Lambda_m \setminus P_m}|| \leqslant \\ \leqslant ||x - S_{P_m}(x)|| + ||S_{\Lambda_m \setminus P_m}(x)|| + ||S_{P_m \setminus \Lambda_m}(x)||. \end{aligned}$$

Teraz,

$$\begin{aligned}||x - S_{P_m}(x)|| \leqslant ||x - Q_m(x)|| + ||Q_m(x) - S_{P_m}(x)|| = \\ = \operatorname{dist}(x, \Sigma_n) + \varepsilon + ||S_{P_m}(Q_m(x) - x)|| \leqslant \\ \operatorname{dist}(x, \Sigma_n) + \varepsilon + ||S_{P_m}||(\operatorname{dist}(x, \Sigma_n) + \varepsilon) \leqslant \\ (K+1)\operatorname{dist}(x, \Sigma_n) \text{ z bezwarunkowości.}\end{aligned}$$

Dalej,

$$\begin{aligned}||S_{\Lambda_m \setminus P_m}(x)|| = ||S_{\Lambda_m \setminus P_m}(x - Q_m(x))|| \leqslant K||x - Q_m(x)|| \leqslant \\ K(\operatorname{dist}(x, \Lambda_m) + \varepsilon).\end{aligned}$$

Aby oszacować $||S_{P_m \setminus \Lambda_m}(x)||$, określmy

$$A = \max_{k \in P_m \setminus \Lambda_m} |x_k^*(x)| \leqslant B = \max_{k \in \Lambda_m \setminus P_m} |x_k^*(x)|.$$

Teraz,

$$\begin{aligned}||S_{P_m \setminus \Lambda_m}(x)|| \leqslant K \cdot A|| \sum_{k \in P_m \setminus \Lambda_m} x_k|| \leqslant KAD|| \sum_{k \in \Lambda_m \setminus P_m} x_k|| \\ \leqslant K^2 AD|| \sum_{k \in P_m \setminus \Lambda_m, x_k^*(x) \neq 0} x_k|| = K^2 AD|| \sum_{k \in \Lambda_m \setminus P_m, x_k^*(x) \neq 0} \frac{1}{x_k^*(x)} x_k^*(x) x_k|| \leqslant \\ \frac{K^3 AD}{B}|| \sum_{k \in \Lambda_m \setminus P_m} x_k^*(x) x_k|| \leqslant K^3 D \cdot ||S_{\Lambda_m \setminus P_m}(x)|| \leqslant \\ K^4 D(\operatorname{dist}(x, \Sigma_n) + \varepsilon)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Do bezwarunkowości wystarczy pokazać oszacowania

$$||S_F(x)|| \leqslant (G+1)||x||, \text{ gdzie } F \subset \mathbb{N}, \#F < \infty \ .$$

Niech $\#F = m$ oraz $\alpha > 0$ będzie takie, że

$$\infty > \alpha > \max_k |x_k^*(x)|.$$

Określmy

$$y = x - S_F(x) + \alpha \sum_{k \in F} x_k.$$

Mamy

$$\operatorname{dist}(y, \Sigma_n) \leqslant ||y + S_F(x) - \alpha \sum_k x_k|| = ||x||.$$

Stąd

$$G_m(y) = \alpha \cdot \sum_{k \in F} x_k.$$

Teraz,

$$||x - S_F(x)|| = ||y - G_m(y)|| \leqslant G\mathrm{dist}(y, \Sigma_m) \leqslant ||x||,$$

co łatwo prowadzi do celu. Czas na dowód demokratyczności. Niech $P, Q \subset \mathbb{N}$ oraz $\#P = \#Q = m$, $F = m$, $F \cap P = F \cap Q = \emptyset$, $\varepsilon > 0$,

$$x = (1+\varepsilon)(\sum_{k \in Q} x_k) + \sum_{k \in F} x_k.$$

Z zachłanności

$$|| \sum_{k \in F} x_k || \leqslant G \cdot \mathrm{dist}(x, \Sigma_n) \leqslant G(1+\varepsilon) || \sum_{k \in Q} x_k ||.$$

Podobnie,

$$|| \sum_{k \in P} x_k || \leqslant G(1+\varepsilon) || \sum_{k \in F} x_k ||.$$

Z dowolności ε mamy tezę, bo

$$|| \sum_{k \in P} x_k || \leqslant G || \sum_{k \in F} x_k || \leqslant G^2 || \sum_{k \in Q} x_k ||.$$

□

Lemat 60. *Dane są liczby $n_1 < n_2 < \ldots < n_s$ i zbiory mierzalne $E_j \subset [0,1]$, $j = 1, \ldots, s$, $0 < q < \infty$. Wówczas*

$$\int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{s} 2^{\frac{n_j}{q}} \chi_{E_j}(x) \right)^q dx \leqslant C_q \sum_{j=1}^{s} 2^{n_j} |E_j|.$$

Dowód. Niech

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{s} 2^{\frac{n_j}{q}} \chi_{E_j}(x),$$

$$F_l = E_l \setminus (E_{l+1} \cup \ldots \cup E_s), \; l = 1, \ldots, s.$$

$F_s = E_s$. Dla $x \in F_l$ mamy

$$\varphi(x) \leqslant \sum_{j=1}^{s} 2^{\frac{n_j}{q}} \leqslant C_q 2^{\frac{n_l}{q}}.$$

Zatem,

$$\int_0^1 \varphi(x)^q dx \leqslant C_q^q \sum_{l=1}^{s} 2^{n_l} |F_l| \leqslant C_q^q \sum_{l=1}^{s} 2^{n_l} |E_l|.$$

□

Lemat 61. *Niech h_n to układ Haara unormowany w $L_2[0,1]$, $\#A = m$, $1 < p < \infty$,*

$$f = \sum_{k\in A} c_k h_k \ i \ ||c_k h_k||_p \leqslant 1$$

dla $k \in A$. Wówczas $||f||_p \leqslant C_q m^{\frac{1}{p}}$.

Dowód. Niech $I_n = \mathrm{supp} h_n$ oraz

$$||c_k h_k||_p = |c_k||I_k|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \leqslant 1.$$

Zatem $|c_k| \leqslant |I_k|^{-\frac{1}{p}}$. Teraz szacujemy

$$||f||_p \leqslant || \sum_{k\in A} |c_k h_k| ||_p \leqslant || \sum_{k\in A} |I_k|^{-\frac{1}{p}} \chi_{I_k}(x)||_p.$$

Niech $n_1 < \ldots < n_s$ - liczby naturalne takie, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje $j \in \mathbb{N}$ spełniające $|I_k| = 2^{-n_j}$. Niech

$$E_j = \bigcup_{k\in A} I_k.$$

Liczymy,

$$|| \sum_{k\in A} |I_k|^{-\frac{1}{p}} \chi_{I_k}(x)||_p = \left(\int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{s} 2^{\frac{n_j}{p}} \chi_{E_j}(x) \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \gamma$$

Z lematu poprzedniego dla $q = p$ mamy

$$||f||_p \leqslant \gamma C_p \left(\sum_{j=1}^{s} |E_j| 2^{n_j} \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_p m^{\frac{1}{p}},$$

gdyż $m = \#A = \sum_{j=1}^{s} |E_j| 2^{n_j}$. □

Twierdzenie 62. *Układ Haara unormowany w $L_p[0,1]$ jest bazą demokratyczną.*